２０１５年度数理科学基礎Ｉ（理Ｉ 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 １　2015/4/20（月）
'15/4/20：問 1.2 を追加．以降の問番号を変更．
'15/4/21：問 1.6 の 5) の誤植を修正．問 1.13 と 1.14 を追加．更に問 1.15 を追加．
'15/6/26：問 1.6 の 3) の誤植を修正．

注意．

- 問題の並びは難易度の順にも，講義で扱った順にも一致していない．
- これはあくまで演習問題であって期末試験（ターム末試験）の事前公開ではない．また，数理科学基礎演習とは内容の上では直接的に関連するが，成績評価という意味では関係しない．
- ヒントを時々附した．多くの場合ヒントは非自明なことから成る．このような場合にはヒントの内容を無条件で認めるのではなく，必ず証明も考えること．
- 「$*$」が付いている問はやや難しい．

問 1.1.　1) $A, B \subset \mathbb{R}$ を開区間とする．$A \cap B$ は開区間であることを示せ．
注：$A \cap B = \varnothing$ であったり，$A = \mathbb{R}$ である場合なども考える必要がある．

2) $A, B \subset \mathbb{R}$ を開区間とする．$A \cap B \neq \varnothing$ であれば $A \cup B$ は開区間であることを示せ．
3) $A, B \subset \mathbb{R}$ を閉区間とする．$A \cap B \neq \varnothing$ であれば $A \cup B$ は閉区間であることを示せ．
4) $A_0, A_1, \ldots \subset \mathbb{R}$ を閉区間とする．$\displaystyle\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall i \in \mathbb{N},\ x \in A_i\}$ は閉区間であることを示せ．
5) $n \in \mathbb{N}$ について $A_n = \left(0 - \dfrac{1}{n+1}, 1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$ と置く．$\displaystyle\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i = [0,1]$ が成り立つことを示せ．
注意：従って，一般には 1) で開区間の数を無限個には出来ない．一方，2) は開区間の数を無限個にしても，和集合が「繋がっている（連結である）」ことを仮定すれば成り立つ（条件「$A \cap B \neq \varnothing$」は開区間が 2 個の場合の条件である．これを一般化する必要があるが，ここでは述べない）．
6) 閉区間 $A_0, A_1, \ldots \subset \mathbb{R}$ であって，$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = (0,1)$ が成り立つような例を一つ挙げよ．
注意：従って，一般には 3) で閉区間の数を無限個には出来ない．

問 1.2. A, B を集合とする．$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ と置いて，A と B の**対称差**と呼ぶ．

1) $A = B$ であることと，$A \triangle B = \varnothing$ が成り立つことは同値であることを示せ．
2) $(A \triangle B) \cup (A \cap B) = A \cup B$ 及び $(A \triangle B) \cap (A \cap B) = \varnothing$ が成り立つことを示せ．

問 1.3. A, B, C を集合とし，$f\colon A \to B$，$g\colon B \to C$ を写像とする．

1) f は単射であるが $g \circ f$ は単射でないような例を一つ挙げよ．

2) g は全射であるが $g \circ f$ は全射でないような例を一つ挙げよ．

3) $g \circ f$ は単射であるが g は単射でないような例を一つ挙げよ．

4) $g \circ f$ は全射であるが f は全射でないような例を一つ挙げよ．

問 1.4. 1) $a \in \mathbb{R}$ が A の下界であれば $b \leq a$ なる全ての $b \in \mathbb{R}$ について，b は A の下界であることを示せ．

2) $a, b \in \mathbb{R}$ とすると (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ は有界であることを示せ．また，$(a, +\infty)$ は有界でないことを示せ．

3) $A \subset \mathbb{R}$ が有界であることと，ある $a, b \in \mathbb{R}$ が存在して $A \subset [a, b]$ が成り立つことは同値であることを示せ．

4) 任意の集合 A について，$\varnothing$ は A の部分集合であることを示せ．
ヒント：$B \subset A$ が成り立つことは，$\forall b,\ (b \in B \to b \in A)$ と書き直すことができる．

問 1.5. 1) $A = (0, 1) \cap \mathbb{Q} (\subset \mathbb{R})$ とする．$\sup A, \inf A, \max A, \min A$ がそれぞれ存在するか調べ，存在する場合には具体的に求めよ．

2) $\max A$ が存在すれば $\sup A$ も存在して $\sup A = \max A$ が成り立つことを示せ．同様に，$\min A$ が存在すれば $\inf A$ も存在して $\inf A = \min A$ が成り立つことを示せ．

問 1.6. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を上に有界な実数列とする．

1) $n \in \mathbb{N}$ について，$b_n = \sup\limits_{m \geq n} b_m$ と置く．$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は上に有界な実数列であって，**単調減少**である，即ち

$$m < n \Rightarrow a_m \geq a_n$$

が成り立つことを示せ．

2) (b_n) が下にも有界であると仮定する．この時，$\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} b_n$ が存在することを示せ．また，この値を $\limsup\limits_{n \to +\infty} a_n$ あるいは $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}}\, a_n$ で表して，(a_n) の**上極限**と呼ぶ．(b_n) が下に有界でない時には形式的に $\limsup\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ と定める．そもそも (a_n) が上に有界でない場合には形式的に $\limsup\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ と定める．

3) (b_n) が下にも有界であると仮定する．数列の収束の定義を調べ[1]，$\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \limsup\limits_{n \to +\infty} a_n$ が成り立つことを示せ．また，(b_n) が下に有界でない場合には $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = -\infty$ が成り立ち，形式的にはやはり $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \limsup\limits_{n \to +\infty} a_n$ が成り立つことを示せ．

4) (a_n) が下に有界な実数列である場合，$c_n = \inf\limits_{m \geq n} a_m$ と置くと (c_n) は下に有界な実数列で，単調増加である．(c_n) が上にも有界な時には，その上限を $\liminf\limits_{n \to +\infty} a_n$ と定め，上に有界で

[1] 講義で後日扱うので，予習と考えればよい．

ない時には $\liminf_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ と定める．$\liminf_{n\to+\infty} a_n$ は $\varliminf_{n\to+\infty} a_n$ とも表し，(a_n) の**下極限**と呼ぶ．そもそも (a_n) が下に有界でない場合には $\liminf_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ と定める．

下極限についてのこれらの主張を確かめ，3) と同様のことが成り立つことを示せ．

5) $a_n = (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$ と置く．$\limsup_{n\to+\infty} a_n$ および $\liminf_{n\to+\infty} a_n$ を求めよ．

問 1.7. 講義で扱った命題を参考に，次の主張を示せ．

主張：$A \subset \mathbb{R}$ とすると以下は同値である．

1) $a \in \mathbb{R}$ は A の下限である．即ち $a = \inf A$ が成り立つ．
2) $a \in \mathbb{R}$ について，$(\forall x \in A,\ x \geq a)$ かつ $(\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x < a + \epsilon)$ が成り立つ．

問 1.8***.** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を有界な実数列とし，$b_n = \sup_{m\geq n} a_m$ と置く．また，$a = \limsup_{n\to+\infty} a_n$ と置く．

1) 問 1.7 を用いて
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ b_n < a + \epsilon$$
が成り立つことを示せ．
ヒント：問 1.7 とは微妙に異なるが，ほぼ同じ形の主張である．

2) 1) より強く，
$$\forall \epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq N,\ a \leq b_n < a + \epsilon$$
が成り立つことを示せ．
ヒント：(b_n) が単調減少であることに注目すると良い．

3) $n \in \mathbb{N}$ を固定する．b_n について
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N},\ m \geq n,\ b_n - \epsilon < a_m \leq b_n$$
が成り立つことを示せ．

4)
$$\forall \epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq N,\ a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$$
が成り立つことを示せ．また，
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ (a_n \geq a + \epsilon \to n \leq N)$$
が成り立つことを示せ．
ヒント：前半は 2) と 3)，後半は 1) を用いると良い．

5) $a \in \mathbb{R}$ について 4) の二条件が成り立つならば $a = \limsup_{n\to+\infty} a_n$ が成り立つことを示せ．

6) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の下極限についても同様のことを考えてみよ．

注 1.9. 問 1.8 の 4) の前半の条件は $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が a に収束することの定義と極めて近く，関連は深いが異なる物である．混同しないこと．

問 1.10. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

により定める．

1) 閉区間 $\left[\dfrac{1}{6}, 1\right]$ に含まれる f の極大点・極小点を全て求めよ．また，それぞれの点における極大値・極小値も求めよ．
2) $x = 1$ は f の最大点であることを示せ．
3) $x = 1$ は f の極大点ではないことを示せ．

問 1.11. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ により定める．$a \in \mathbb{R}$ を固定し，$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(t) = \begin{pmatrix} t \\ at \end{pmatrix}$ により定める．$f(g(t))$ は $\mathbb{R}$ の点（元）であるから，t に $f(g(t))$ を与える対応（函数・写像）は $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}$ 値函数（あるいは $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2$ への写像）である．これを $f \circ g$ で表すことにする．$f \circ g(t) = f(g(t))$ である．

1) $f \circ g(t)$ を計算せよ．また，$(f \circ g)'(t) = \dfrac{d(f \circ g)}{dt}(t)$ を求めよ．
2) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $h(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ により定める．$f \circ h$ を，$t = 0$ の近くの様子に注意して調べよ．

問 1.12. $n \in \mathbb{Z},\ n > 1$ とする．$f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 \leq x < \dfrac{1}{n}, \\ 2n - n^2x, & \dfrac{1}{n} \leq x < \dfrac{2}{n}, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$ により定める．

1) f_n のグラフの概形を描け．また，$a_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$ と置き，a_n と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$ を求めよ．
2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ により定める．f を求め，グラフの概形を描け．また，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$ を求めよ．

極限に関しては，自分で定義を調べてもよいし，ここでは高校までと同様に考えても良い．

問 1.11 や 1.12 が示唆するように，極限を「限りなく近づく」だけで，高校までのように把握するのには無理がある．これをどうするかというのは講義の主題の一つである．

問 1.13. 以下に挙げる集合 A, B の組のそれぞれについて，なるべく自然な全単射を一つ挙げよ．

1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,|\, x < y\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,|\, x > y\}$.
2) $x \in \mathbb{R}$ を変数とする函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ についての常微分方程式 $\dfrac{df}{dx}(x) = f(x)$ の解は，ある $c \in \mathbb{R}$ を用いて $f(x) = ce^x$ で与えられることが知られている．逆に，このような形をした f は全て解である．これを踏まえて，
$$A = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ は微分可能であって } \frac{df}{dx}(x) = f(x) \text{ を満たす} \right\},$$
$$B = \mathbb{R}$$
とする．
3) $x, y \in \mathbb{R}$ に関する一次方程式
$$(*) \qquad 2x + y = 1$$
の解全体からなる $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$（これは定義である）の部分集合
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x + y = 1 \right\}$$
を考える．A は一次方程式 $(*)$ の**解空間**と呼ばれる．なお，$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ の元は (x, y) と表すが，このように $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すこともよくある．絶対というわけではないが，微積分では横に，線型代数では縦に書くことが多い．それはそれとして，$B = \mathbb{R}$ として A から B への全単射を一つ挙げよ．
※ 誰がどう見ても自然であるような V から $\mathbb{R}$ への全単射は実は存在しないので，本当に自分で写像を一つ選ぶ必要がある．その意味ではこの問は難しい．
4) $A = \{x$ に関する，実数を係数とする高々 n 次の多項式全体$\}$, $B = \mathbb{R}^{n+1} = \overbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}^{(n+1)\text{ 個}}$.
5) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x^2 + y^2 < 1,\ x > 0.\ y > 0\}$, $B = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \pi/2\}$.

問 1.14***.** A, B を集合とする．

1) $f\colon A \to B$ を全単射とする．$g\colon B \to A$ を次のように定める．$b \in B$ とする．f は全射であるから，ある $a \in A$ が存在して $f(a) = b$ が成り立つ．$a' \in A$ について $f(a') = b$ が成り立つならば $f(a) = f(a')$ が成り立つが，f は単射なので $a = a'$ が成り立つ．従って，$b \in B$ が定まれば $a \in A$ が定まるので，$g(b) = a$ と置く．この時 $g \circ f = \mathrm{id}_A$, $f \circ g = \mathrm{id}_B$ が成り立つことを示せ．
ヒント：$b \in B$ であるとき，$g(b)$ は $f(a) = b$ が成り立つ唯一の $a \in A$ として定めたことに注意せよ．

2) $f\colon A \to B,\ g\colon B \to A$ を写像とし，$g \circ f = \mathrm{id}_A,\ f \circ g = \mathrm{id}_B$ が成り立つとする．f, g は共に全単射であることを示せ.

ヒント：恒等写像は全単射である.

問 1.15. $f_1, \dots, f_r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を函数とする．ただし $\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n\text{ 個}}$ である（なお，この問では $\mathbb{R}^n$ の元は横に並べて表す）．ここで，$c = (c_1, \dots, c_r) \in \mathbb{R}^r$ とし，$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ を変数とする連立方程式

$$(**) \qquad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = c_1, \\ \qquad\vdots \\ f_r(x_1, \dots, x_n) = c_r \end{cases}$$

を考える．V を連立方程式 $(**)$ の解空間とする．即ち，

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x_1, \dots, x_n) = c_1, \dots, f_r(x_1, \dots, x_n) = c_r\}$$

とする.

1) $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ を $F(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x))$ により定めると $V = F^{-1}(\{c\})$ が成り立つことを示せ[2].

2) $\mathbb{R}^r$ の部分集合 S を

$$W = \{c \in \mathbb{R}^r \mid \text{連立方程式 } (**) \text{ が解を持つ}\}$$

と置くと，$W = \mathrm{Im}\, F = F(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^r$ が成り立つことを示せ.

問 1.15 の状況はさしあたり連立一次方程式を行列を用いて扱う際に現れる．つまり，ある $a_{ij},\ 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le n$ が存在して，$f_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ が成り立つとする．すると連立方程式 $(**)$ は連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad\vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n = c_r \end{cases}$$

となる．この場合に V や W を調べることについて「線型代数学」で扱う（筈である）.

（以上）

[2] $f\colon A \to B$ を写像とする．$D = \{d\} \subset B$ が一点のみからなる部分集合であるとき，$f^{-1}(D) = f^{-1}(\{d\})$ をしばしば $f^{-1}(d)$ で表す．この記法を用いるなら $F^{-1}(\{c\}) = F^{-1}(c)$ である.