２０１５年度数学II（足助担当）　演習問題 9　2015/11/18（水）

講義のページが

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~asuke/kougi/index.html

にある．また，学習相談室に関する情報（学内からのみ閲覧可能）が

http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/~sugaku/ut/soudanshitsu.html

に記載されているので必要に応じて参考にすること．なお，URL は変更されることがある．

全般に K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．今回は全般的に非常に基本的なことなのでやや難しい[†1]．

全単射・逆写像などについて

講義で紹介した三冊の参考書のうち，一番薄い参考書には該当する記述がほとんどない[†2]のでここに（基本的には講義に沿って）まとめておく．行列の計算をするだけであればここまで意識する必要はあまりないが，先々線型代数や外の数学（例えば微積分など）について学んだり，あるいは行列の範囲に限っても論理的に話を整理するためには知っておいた方が良いし，場合によっては必須である．

定義 9.1. V, W を集合，$f\colon V \to W$ を写像とする．

1) f が**単射**であるとは，$v, v' \in V,\ f(v) = f(v') \Rightarrow v = v'$ が成り立つことを言う．
2) f が**全射**であるとは，$\forall w \in W,\ \exists v \in V,\ w = f(v)$ が成り立つことを言う．
3) f が単射かつ全射であるとき f は**全単射**であるという．

V から W への全単射 f が存在すれば，$v \in V$ と $f(v) \in W$ を対応させることにより，事実上 V と W を同一と考えることができる．実際，$w \in W$ を考えることを，（わざわざ）$f(v) = w$ が成り立つような唯一の $v \in V$ を考えることに読み替え，w を用いる場面では $f(v)$ を用いることにしても，実質的な差異が生じない．このように V と W を，事実上同一の物として扱うことを ***f* を通じて *V* と *W* を同一視する**などと言う．

例 9.2. $V = \{$ 高々 1 次の，K の元を係数とする t に関する多項式全体 $\}$ と置く．$V = \{a + bt \mid a, b \in K\}$ が成り立つ．$f\colon K^2 \to V$ を $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ により定めると，f は全単射である．実際，$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$ が成り立つならば，$x_1 + x_2 t = y_1 + y_2 t$ が多項式として成り立つから，$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2$ が成り立つ．また，$a + bt \in V$ について，$f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = a + bt$ が成り

[†1] 基本的なことはしばしば難しい．

[†2] こっそり，あるいは暗黙のうちに用いている箇所は散見されるが，表向き何も述べていないと思われる．限られた紙面なので，ここで扱った事柄も網羅的ではない．必要に応じて図書館で教科書の該当部分を調べたりすること．

立つ．f により $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ と $x_1 + x_2 t$ が対応するが，V の元は多項式であって，K^2 の元は数ベクトルであるから，これらは同一ではない．

例 9.3. $V = \{0, 1, 2\}$ とし，$W = \{1, 2, 4\}$ とする．$f\colon V \to W$ を $f(n) = 2^n$ により定めればこれは全単射である．

補題 9.4. $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}$ とし，$f\colon V \to W$ を写像とする．f は（n 変数の）函数と考えても良い（よくわからなければ $n = 1$ として良いが，V と W を混同しないこと）．この時には次が成り立つ．

1) f が単射であることは，$y \in \mathbb{R}(= W)$ について $x \in \mathbb{R}^n(= V)$ に関する方程式 $y = f(x)$ が解を持つならば，その解は一意的であることと同値である（解の存在自体については何も述べていない）．
2) f が全射であることは，任意の $y \in \mathbb{R}(= W)$ について，$x \in \mathbb{R}^n(= V)$ に関する方程式 $y = f(x)$ が解を持つことと同値である．
3) f が全単射であることは，任意の $y \in \mathbb{R}(= W)$ について，$x \in \mathbb{R}^n(= V)$ に関する方程式 $y = f(x)$ が唯一つの解を持つことと同値である．

証明. 1) の証明．f は単射であるとする．また，$y \in \mathbb{R}$ について $y = f(x)$ は解を持つとする．$z, z' \in \mathbb{R}^k$ について $y = f(z)$, $y = f(z')$ が成り立つのであれば $f(z) = f(z')$ が成り立つので，f が単射であることにより $z = z'$ が成り立つ．従って $y = f(x)$ が解を持つのであれば，それは一意的である[†3]．逆に，$y = f(x)$ が解を持つのであれば，それは一意的であるとする．$z, z' \in \mathbb{R}^k$ について $f(z) = f(z')$ が成り立つとする．$y = f(z)$ と置けば $z, z' \in \mathbb{R}^k$ は方程式 $y = f(x)$ の解である．従って仮定により $z = z'$ が成り立つので，f は単射である．
2) の証明．f は全射であるとする．$y \in \mathbb{R}(= W)$ とすれば，ある $z \in \mathbb{R}^n(= V)$ について $y = f(z)$ が成り立つ．つまり，方程式 $y = f(x)$ は解 z を持つ．逆に，方程式 $y = f(x)$ の解が y によらず解を持つとする[†4]．$y \in \mathbb{R}$ が与えられたとき，z を $y = f(x)$ の解の一つとすれば，$y = f(z)$ が成り立つので f は全射である．
3) の証明．f が全単射であるとする．2) により，方程式 $y = f(x)$ は解を持つ．また，1) によりこの解は一意的である．逆に $y = f(x)$ が y によらず一意的に解を持つとする．$y = f(x)$ が y によらず解を持つ（一意的であるかどうかは忘れている）ので，2) により f は全射である．$y = f(x)$ が解を持てば（今は必ず持つが，そのことは一旦忘れている）それは一意的であるから，1) により f は単射である． □

[†3]つまり，異なるかも知れない解 z, z' を考えたが，$z = z'$ が成り立つので解は一つしかない．

[†4]一般にはもちろん解は y に依存する．ここで仮定しているのは，$y = f(x)$ が「解を持つ」事実自体は y にはよらない，ということである．

注 9.5. 証明をよく読めば分かるように，$V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}$ である必要は全くない．ただし，一般の場合には $y = f(x)$ としても「方程式」とはあまり呼ばない．また，3) の証明は方程式云々というよりは 1) と 2) を用いた論理の問題である．

特に方程式が $Ax = c$ で与えられる場合には次のように解釈できる．

系 9.6. $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$f\colon K^n \to K^m$ を $f(x) = Ax$ により定める．また，$c \in K^m$ とする．

1) f が単射であることは,（c によらず）$Ax = c$ の解が存在すれば一意的であることと同値である．
2) f が全射であることは，$Ax = c$ の解が c によらず存在することと同値である．
3) f が全単射であることは $Ax = c$ の解が c によらず一意的に存在することと同値である．

系 9.6 に関連して次が成り立つ．これは，線型写像の**核**（kernel）と呼ばれる物に深く関連する．

命題 9.7. 以下の二条件は同値である．

1) $y \in K^m$ について，$x \in K^n$ に関する方程式 $Ax = y$ に解が存在するならば一意的である．
2) $x \in K^n$ に関する方程式 $Ax = o_m (\in K^m)$ の解は $x = o_n (\in K^n)$ のみである．

証明. 1) を仮定する．$o_n \in K^n$ は $Ax = o_m$ の解である．従って，仮定により z を $Ax = o_m$ の解とすれば（一意性により）$z = o_n$ が成り立つ．逆に 2) を仮定する．z, z' を $Ax = y$ の解とする．$w = z - z'$ と置けば，$Aw = A(z - z') = Az - Az' = y - y = o_m$ が成り立つ.. 従って，仮定により $w = o_n$ が成り立つ．これは $z = z'$ が成り立つことと同値である． $\square$

一方，全射性は線型写像の**像**（image）と呼ばれる物に深く関連する．線型写像の核や像については数理科学概論 II で扱う[†5]．

さて，例 9.2 において，$g\colon V \to K^2$ を $g(a + bt) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ により定めると，$a + bt$ に f により対応する K^2 の元が $g(a + bt)$ として得られる．つまり，$f(g(a + bt)) = f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = a + bt$ が成り立つ．また，g も全単射であって，$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ に g により対応する V の元が $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$ として得られる．

より一般的には次が成り立つ．まず一つ定義する．

[†5] いつもこればかり述べている気がする．

定義 9.8. V, W を集合とし，$f\colon V \to W$ を写像とする．$g\colon W \to V$ が f の**逆写像**であるとは，

$$\forall v \in V,\ g(f(v)) = v,$$
$$\forall w \in W,\ f(g(w)) = w$$

が成り立つことを言う．このとき g を f の**逆写像**と呼ぶ．逆写像は存在すれば一意的であるので f^{-1} で表す．

例 9.9. $V = W = K^n$ とする．$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とし，$f\colon V \to W$ を $f(v) = Av$ により定める．$g\colon W \to V$ を $g(w) = A^{-1}w$ により定める．すると，$g(f(v)) = g(Av) = A^{-1}(Av) = v$, $f(g(w)) = f(A^{-1}w) = A(A^{-1}w) = w$ が成り立つ．よって g は f の逆写像である．

定理 9.10. V, W を集合とする．$f\colon V \to W$ が全単射であることと，f に逆写像が存在することは同値である．

証明. f に逆写像が存在するとして，それを $g\colon W \to V$ とする．$v, v' \in V$ について $f(v) = f(v')$ が成り立てば，$v = g(f(v)) = g(f(v')) = v'$ が成り立つので f は単射である．また，$w \in W$ について $v = g(w)$ と置けば $f(v) = f(g(w)) = w$ が成り立つので f は全射である．逆に f が全単射であるとする．まず $g\colon W \to V$ を次のように定める．$w \in W$ とする．f は全射であるから，$v \in V$ であって $w = f(v)$ が成り立つ物が存在する．また，$v' \in V$ が $w = f(v')$ を満たすとすると $f(v) = w = f(v')$ が成り立つ．f は単射であるから，$v = v'$ が成り立つ．従って $w = f(v)$ が成り立つような $v \in V$ が一意的に定まるから，$g(w) = v$ と置く．改めて $w \in W$ とする．$g(w)$ は $f(v) = w$ が成り立つような唯一の $v \in V$ だから，$f(g(w)) = w$ が成り立つ．また，$v \in V$ とする．$w = f(v)$ と置く．v は $f(v) = w$ が成り立つ唯一の $v \in V$ であるから，$g(f(v)) = v$ が成り立つ．従って g は f の逆写像である． □

全単射を定めた（定義 9.1）後の注意で,「$w \in W$ を考えることを,（わざわざ）$f(v) = w$ が成り立つような唯一の $v \in V$ を考えることに読み替え，w を用いる場面では $f(v)$ を用いることにしても，実質的な差異が生じない.」と述べた．$f\colon V \to W$ が全単射であることと，f に逆写像 $g(= f^{-1})$ が存在することは同値なのだから，後者の場合にも V と W を f を通じて同一視できるはずである．これは実のところ更に明快である．実際，$w \in W$ を考える代わりに $g(w) \in V$ を考えることとし，w を用いる場面では $f(g(w))$ を考えることにする．$v = g(w)$ と書き換えれば，やっていることは f が全単射の場合と同じであることが分かる（$g(w)$ は $f(v) = w$ が成り立つような唯一の $v \in V$ として定めたのであった）．この意味で，定理 9.10（の証明）は，f が全単射の場合に V と W を f を通じて同一視することを，より具体的に述べた物である．

ところで，逆写像の定義は恒等写像，写像の合成を用いるとより明快になる．

定義 9.11 (恒等写像)**.** V を集合とする．$v \in V$ に対して $v \in V$（v 自身）を与える写像を $\boldsymbol{V}$ **の恒等写像**と呼ぶ．恒等写像は Id_V, id_V などで多く表す．V が明らかである場合には単に Id, id などでも表す．

id_V は V から V 自身への写像である．

定義 9.12 (写像の合成)**.** V, W, U を集合，$f\colon V \to W$, $g\colon W \to U$ を写像とする．$g \circ f\colon V \to U$ を $v \in V$ について $g \circ f(v) = g(f(v))$ と置くことにより定め，f **と** g **の合成（合成写像）**と呼ぶ．

注 9.13. f と g の合成写像 $g \circ f$ と，g と f の合成写像 $f \circ g$ は一般には異なる．そもそも $g \circ f$ と $f \circ g$ が両方とも定まるとは限らない．

問 9.14. f, g を以下のように定めるとき，$g \circ f$ を求めよ．

1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ により，$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(y) = y^3$ によりそれぞれ定める．
2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $f(x) = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix}$ により，$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $g\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = y_1$ により定める．これについては $f \circ g$ も求めよ．

問 9.15. $A = [a_{ij}]_{ij} \in M_{m,n}(K)$ とし[†6]，$f\colon K^n \to K^m$ を $f(x) = Ax$ により定める．また，$B = [b_{ij}]_{ij} \in M_{l,m}(K)$ を $g(y) = By$ により定める．このとき，$C = BA$ と置くと，$g \circ f(x) = Cx$ が成り立つことを示せ．
※ 作業としては行列の計算であるが，重要な意味を持つ．意味については数理科学概論 II で扱う．

定義 9.8 は次のように書き換えられる．

定義 9.8'. V, W を集合とし，$f\colon V \to W$ を写像とする．$g\colon W \to V$ が f の**逆写像**であるとは，

$$g \circ f = \mathrm{id}_V,$$
$$f \circ g = \mathrm{id}_W$$

が成り立つことを言う．このとき g を f の**逆写像**と呼ぶ．逆写像は存在すれば一意的であるので f^{-1} で表す．

[†6] a_{ij} を (i,j)-成分とする行列を $[a_{ij}]_{ij}$ あるいは単に $[a_{ij}]$ などと略記することがある．やや砕けた記法である．

定義 9.8' では写像を比較する必要がある．これに関しては次のように定める．

定義 9.16. V, W を集合，$f, g\colon V \to W$ を写像とする．f と g が**等しい**とは

$$\forall v \in V,\ f(v) = g(v)$$

が成り立つことをいう．f と g が等しいことを $f = g$ と表す．

問 9.17. 定義 9.8' は定義 9.8 の言い換えであることを確かめよ．

なお，次の事実に注意せよ．

補題 9.18. $V = K^n$ とし，$f\colon V \to V$ を $f(v) = I_n v$ により定める．すると $f = \mathrm{id}_V$ が成り立つ．

証明. 任意の $v \in V$ について $f(v) = I_n v = v$ が成り立つので，$f = \mathrm{id}_V$ である． □

定理. $A \in M_{m,n}(K)$，$B \in M_{n,m}(K)$ とする．$AB = I_m,\ BA = I_n$ が成り立つならば $n = m$ であって，$B = A^{-1}$ が成り立つ．

さて，次が成り立つ．

補題 9.19. V, W, U, X を集合，$f\colon V \to W,\ g\colon W \to U,\ h\colon U \to X$ を写像とする．この時 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ が成り立つ．

証明. $v \in V$ とする．$(h \circ (g \circ f))(v)$ は定義により，$g \circ f(v) \in U$ に h を施して得られる X の元である．ところで，$g \circ f(v)$ は定義により，$f(v)$ に g を施して得られる U の元である．従って $(h \circ (g \circ f))(v)$ は「$f(v)$ に g を施して得られる U の元」に h を施して得られる X の元である．これをもう少し平たくいえば，$(h \circ (g \circ f))(v)$ は，$f(v)$ に g と h を続けて施して得られる X の元である，ということになる．一方，$((h \circ g) \circ f)(v)$ は，$f(v)$ に $h \circ g$ を施して得られる X の元である．一般に $w \in W$ であれば $h \circ g(w)$ は，w に g を，次いで h を施して得られる X の元であるから，$((h \circ g) \circ f)(v)$ は（$w = f(v)$ として）$f(v)$ に g を，次いで h を施して得られる X の元である．これはやはり $f(v)$ に g と h を続けて施して得られる X の元であるから，$(h \circ (g \circ f))(v) = ((h \circ g) \circ f)(v)$ が成り立つ． □

注 9.20. $A \in M_{m,n}(K),\ B \in M_{n,l}(K),\ C \in M_{l,p}(K)$ のとき

$$A(BC) = (AB)C$$

が成り立つのであった．このこととの類似性に注意せよ．

補題 9.21. V, W を集合，$f\colon V \to W$ を写像とする．f に逆写像が存在するならば一意的である．

証明. $g, h\colon W \to V$ を f の逆写像とする．この時，$g = g \circ \mathrm{id}_W = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_V \circ h = h$ が成り立つ． □

問 9.22. $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ ならば，A の逆行列は一意的であることを示せ．

問 9.23. 以下のように定める写像について，

a) 単射でも全射でもない．
b) 単射であるが，全射でない．
c) 単射ではないが，全射である．
d) 単射かつ全射，すなわち全単射である．

のいずれであるか，判定せよ．また，全単射である場合には逆写像を求めよ．

1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ により定める．
2) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(x) = x^2$ により定める．
3) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$ により定める．
4) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = e^x$ により定める．ここで e は**自然対数の底**（ネイピア数，Napier's constant）であって，f は**指数函数**である．
5) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \cos x$ により定める．
6) $f\colon [0, \pi) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \cos x$ により定める．ここで，$[0, \pi) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \pi\}$ である．
7) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とし，$f\colon K^n \to K^n$ を $f(x) = Ax$ により定める．
8) $a \in \mathbb{R}$ とし，$f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_a(x) = x^3 + ax$ により定める．

問 9.24*. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．

1) $x \in K^n$ に関する方程式 $Ax = o (\in K^m)$ の解が $x = o (\in K^n)$ のみであれば，$n \leq m$ が成り立つことを示せ．
2) 任意の $y \in K^m$ について，$x \in K^n$ に関する方程式 $Ax = y$ が解を持つならば $n \geq m$ が成り立つことを示せ．
3) 任意の $y \in K^m$ について，$x \in K^n$ に関する方程式 $Ax = y$ が解を唯一つ持つのであれば $n = m$ が成り立つことを示せ．

問 9.25**. $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$f\colon K^n \to K^m$ を $f(x) = Ax$ により定める．

1) $P \in \mathrm{GL}_m(K)$ とし，$f_P\colon K^n \to K^m$ を $f(x) = PAx$ により定める．f が単射であることは f_P が単射であることと同値であることを示せ．また，f が全射であることは f_P が全射であることと同値であることを示せ．

※ 従って，f が単射あるいは全射であるかどうか調べるためには，A は階段行列であるとして構わない．

2) f が単射であるならば，$n \leq m$ が成り立つことを示せ．

3) f が全射であるならば，$n \geq m$ が成り立つことを示せ．

4) f が全単射であるならば，$n = m$ が成り立つことを示せ．

5) 上の 2) から 4) について，いずれも逆は正しくない．それぞれについて，反例を挙げよ．

問 9.26***.** $A \in M_{m,n}(K)$, $c \in K^m$ を用いて $Ax = c$ と表される，$x \in K^n$ に関する方程式の解空間を $V_{A,c}$ とする．$V_{A,c} = \{x \in K^n \mid Ax = c\}$ である．$a' \in M_{1,n}(K)$, $c' \in K$ とし，$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ a' \end{bmatrix}$, $\widetilde{c} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ と置き，方程式 $\widetilde{A}x = \widetilde{c}$ を考える．これは元の方程式 $Ax = c$ に $a'x = c'$ を付け加えて得られる方程式である．新しい方程式の解空間を $V_{\widetilde{A},\widetilde{c}}$ とする．

1) $V_{\widetilde{A},\widetilde{c}} \subset V_{A,c}$ が成り立つことを示せ．

2) $V_{A,c} \neq \varnothing$ とする．また，$[A\ c]$ を変形して得られる階段行列を X，$[\widetilde{A}\ \widetilde{c}]$ を変形して得られる階段行列を $\widetilde{X}$ とする．このとき，$V_{\widetilde{A},\widetilde{c}} = V_{A,c}$ が成り立つことと，$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} X \\ o \end{bmatrix}$，但し $o \in M_{1,n}(K)$ は零行列，が成り立つことは同値であることを示せ．

3) $\operatorname{rank} X \leq \operatorname{rank} \widetilde{X} \leq \operatorname{rank} X + 1$ が成り立つことを示せ．

4) $V_{A,c} \neq \varnothing$ とする．このとき，$V_{\widetilde{A},\widetilde{c}} = V_{A,c}$ が成り立つことと，$\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} \widetilde{X}$ が成り立つことは同値であることを示せ．

（以上）