２０１５年度数学 II（足助担当）　演習問題 8　2015/11/11（水）

全般に K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．試験的に次のように印を付ける．

無印：解けると期待している．

$*$：少し乃至結構頑張れば解けると思う．

$**$：解ければ大した物だと思っている（今回は該当なし）．

問 8.1. 以下の行列を行基本変形（左基本変形）により階段行列に変形せよ．また．列基本変形（右基本変形）により既約列階段行列に変形せよ．

1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.　2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\sqrt{-1} \end{bmatrix}$.

3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.　4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{-1} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} & -3+2\sqrt{-1} & 1 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$.

問 8.2. 以下の方程式はいずれも $x_1, \dots, x_n$ に関する方程式（連立一次方程式）である．それぞれの解空間（V とする）を $V = \{v \in K^n \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_s \in K,\ v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s + d\}$ の形に表せ．ただし，s は $f\colon K^s \to V$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{bmatrix}\right) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s + d$$

により定めると f が全単射であるように定めること．

1) $n = 8$.

$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 = 0, \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 = 0, \\ x_5 + 2x_6 + x_8 = 0. \end{cases}$$

2) $n = 5$.

$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{-1}x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_4 - 3\sqrt{-1}x_5 = 0. \end{cases}$$

3) $n = 8$.

$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 = 4, \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 = -6, \\ x_5 + 2x_6 + x_8 = 2. \end{cases}$$

4) $n = 5$.

$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{-1}x_3 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + \sqrt{-1}x_4 = 0, \\ \sqrt{-1}x_2 - (3 - 2\sqrt{-1})x_3 + x_4 - \sqrt{-1}x_5 = 0. \end{cases}$$

問 8.3. 問 8.2 の 1)，3) について，$K = \mathbb{R}$ として解いた場合と，$K = \mathbb{C}$ として解いた場合について V，f や $v_1, \dots, v_s, d$ がどのように変化するか（しないか）調べよ．

ヒント：難しく考えずに，素直に解いて比較すれば良い．

問 8.4. 以下は，連立方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ x + y = 0 \end{cases}$$

を解こうとしたものである．結論として，$x = 1,\ y = -1$ を解としているが，このとき $2x+3y = -1$ なのでこれは誤りである．議論に含まれる誤りを指摘し修正せよ．なお，修正の

方法は一通りではなく，直し方によって修正の箇所や個数も異なってくる．正しい修正であればどのようにしてもよい．

解. 与えられた連立方程式は，$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と置くと，$v \in K^2$ に関する方程式

$$Av = w$$

と同値である．これを掃き出し法で解くために A と w を並べて得られる行列 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ を以下のように変形する．即ち，

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行の 2 倍を引く}]{\text{第 1 行から}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列を入れ替える}]{\text{第 1 列と}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を引く}]{\text{第 2 行から}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

従って解は $x = 1,\ y = -1$ である． □

問 8.5. f を実数を係数とする，変数 x に関する多項式とし，次数（x^k の係数が 0 でないような最大の k）を d とする．ここでは $d \geq 1$ とし，

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$$

と表す．最後に，$r \in \mathbb{N},\ r \geq 1$ とし，$(x_1, y_1), \ldots, (x_r, y_r) \in \mathbb{R}^2$，ただし $i \neq j$ ならば $x_i \neq x_j$，とする（ここでは r 個の実数の組と考えれば十分である）．そして，条件

$$(*) \qquad i = 1, \ldots, r \text{ について } f(x_i) = y_i$$

が成り立つとする．

1) $X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^d \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_r & {x_r}^2 & \cdots & {x_r}^d \end{bmatrix}$，$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{bmatrix}$ と置くと $Xa = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$ が成り立つことを示せ．また，$\operatorname{rank} X$ を求めよ．
   ヒント：どう見てもヴァンデルモンドの行列式に関係がある．
2) $d \geq r$ とすると，条件 $(*)$ を満たすような f が複数存在することを示せ．
   ヒント：条件 $d \geq r$ は f に課される条件が多すぎるのか，少なすぎるのか，それとも適切なのか，どれを意味するのか考えてみよ（これは 3) にも共通するヒントである）．
3) $d < r$ とすると，条件 $(*)$ を満たすような f は高々一つである（一つ以下である）ことを示せ．また，$d = r - 1$ ならばこのような f が必ず存在することを示せ．

4)* 2) において，条件 $(*)$ を満たす多項式 f_0 と，条件 $g(x_i) = 0$（ただし $i = 1, \ldots, r$）を満たす多項式 $g_1, \ldots, g_s$ が存在し，「条件 $(*)$ を満たす任意の f について $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ が一意的に存在して $f = f_0 + \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_s g_s$ が成り立つ」が成り立つことを示せ．また，このようなことが成り立つ s の最小値は $d - r + 1$ に等しいことを示せ．

5)** 4) において f_0 や g_i 達の選び方には自由度がある．どの程度の自由度があるか決定せよ．

（以上）