２０１５年度数学 II（足助担当）　演習問題 7　　2015/10/28（水）

全般に K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．今回は試験的に次のように印を付ける．

無印：解けると期待している．

$*$：少し乃至結構頑張れば解けると思う．

$**$：解ければ大した物だと思っている（今回は該当なし）．

定義 7.1. $A \in M_n(K)$ とする．$m \in \mathbb{N}$ について

$$A^m = \begin{cases} I_n, & m = 0, \\ \overbrace{A \cdots A}^{m\text{ 個}}, & m > 0 \end{cases}$$

と定める．なお，A^0 については（$A \notin \mathrm{GL}_n(K)$ の時には）外の定め方もあるが，ここではこのようにする．また，$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．$m \in \mathbb{N}$, $m < 0$ について

$$A^m = (A^{-1})^{-m}$$

と定める．

問 7.2. $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．$m < 0$ について $A^m = \overbrace{A^{-1} \cdots A^{-1}}^{|m|\text{ 個}} = (A^{|m|})^{-1}$ が成り立つことを示せ.

問 7.3. 数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$, $a_n \in K$ を考える．$m > 0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta \in K$ とする．$\{a_n\}$ が漸化式

$$a_{n+m} + \alpha_1 a_{n+m-1} + \cdots + \alpha_m a_n + \beta = 0 \tag{7.3–1}$$

をみたす（このような漸化式を $\boldsymbol{(m+1)}$ **項間線型漸化式**と呼ぶ[†1]．線型漸化式について，$\beta = 0$ なら**斉次**，$\beta \neq 0$ ならば**非斉次**であると言う）こととと $b_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+m-1} \end{bmatrix}$ と定めたとき

$$b_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_m & -\alpha_{m-1} & \cdots & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix} b_n - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \tag{7.3–1'}$$

が成り立つことは同値であることを示せ.

[†1] ここでは考えないが，線型でないものもある．

上の意味で，$(m+1)$ 項間漸化式 (7.3–1) を考えることと，K^m の元の列（K^m の点列と呼ぶ）$\{b_n\}$ に関する漸化式 (7.3–1') を考えることは同値である（b_n の第 1 成分を取り出せば，$\{b_n\}$ から $\{a_n\}$ を復元できる）．

問 7.4* (問 7.3 の続き．記号もそのまま用いる)．問 6.1 を踏まえて

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_m & -\alpha_{m-1} & \cdots & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$

と置く（従って (7.3–1') は $b_{n+1} = Ab_n - \widetilde{\beta}$ と書き換えられる）．数列 $\{a_n\}$ は漸化式 (7.3–1) をみたすとする．もし $\alpha_m = 0$ であるならば，(7.3–1) の代わりに

$$a_{n+m-1} + \alpha_1 a_{n+m-2} + \cdots + \alpha_{m-1} a_n + \beta = 0$$

を考えることにすれば，m 項間漸化式が得られ，この意味で話は簡単になってしまう．そこで $\alpha_m \neq 0$ とする．

1) $\det A \neq 0$ が成り立つことを示せ.

2) $\beta = 0$ とする.

  a) $b_0 \in K^m$ とし，$b_n = A^n b_0$ と定める．ここで $A^0 = I_m$ と定める．b_n の第 1 成分を a_n とすると，$\{a_n\}$ は (7.3–1) を満たすことを示せ.

  b) 逆に $\{a_n\}$ は（$\beta = 0$ として）(7.3–1) を満たすとする．このとき問 7.3 のように $\{b_n\}$ を定める．K^n の点列 $\{c_n\}$ を $c_n = A^{-n} b_n$ で定めることができて，c_n は n に依らないことを示せ．また，このことを用いて，ある $b_0 \in K^m$ が存在して $b_n = A^n b_0$ が成り立つことを示せ.

  ※ 2) の議論は，常微分方程式の**定数変化法**と呼ばれる解法の類似である.

  ※ これで $\beta = 0$ の場合には漸化式 (7.3–1) を満たす数列が全て具体的に求まったことになるが，もう少し工夫すると A の「固有値」を調べれば十分であることがわかる[†2].

3) β は 0 とは限らない，一般の K の元とする．また，$\{a_n\}$ は (7.3–1) を満たすとする.

  a) $\{a'_n\}$ が $a'_{n+m} + \alpha_1 a'_{n+m-1} + \cdots + \alpha_m a'_n = 0$ を満たすとする．このとき，$a''_n = a_n + a'_n$ とすると $\{a''_n\}$ は (7.3–1) を満たすことを示せ．逆に，$\{a''_n\}$ が (7.3–1) を満たすならば，$a'_n = a''_n - a_n$ と置けば $\{a'_n\}$ は $a'_{n+m} + \alpha_1 a'_{n+m-1} + \cdots + \alpha_m a'_n = 0$ を満たすことを示せ.

[†2]ただし，理論的な準備がもう少し必要になる．それらのうち，いくつかの重要な部分については数理科学概論 II で扱う．また，固有値についても数理科学概論 II で扱う．

b) 問 7.3 のように $\{b_n\}$ を定め，更に K^n の点列 $\{d_n\}$ を $d_n = A^{-n}b_n$ により定める．すると $d_{n+1} = d_n - A^{-n-1}\widetilde{\beta}$ が成り立つことを示せ[†3].

c) $n \geq 2$ について，$d_n = d_1 - \sum_{k=1}^{n-1} A^{-k-1}\widetilde{\beta} = d_1 - A^{-n}\sum_{k=0}^{n-2} A^k\widetilde{\beta}$ が成り立つことを示せ．従って $b_n = A^n d_n = Ad_1 - \sum_{k=0}^{n-2} A^k\widetilde{\beta}$ が成り立つ．

d) $I_m - A \in \mathrm{GL}_m(K)$ とする．このとき

$$\sum_{k=0}^{n-2} A^k = (I_m - A)^{-1}(I_m - A^{n-1}) = (I_m - A^{n-1})(I_m - A)^{-1}$$

が成り立つことを示せ．

$I_m - A \in \mathrm{GL}_m(K)$ の場合には d) を用いると確かに $\sum_{k=0}^{n-2} A^k\widetilde{\beta}$ が求まる．しかし，$\{a_n\}$ や $\{b_n\}$ を求めるだけならもっと簡単な話で済む．

e) $\lambda \in K$ とする．$\det(\lambda I_m - A) = \lambda^m + \alpha_1\lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_m$ が成り立つことを示せ[†4].

f) $I_m - A \in \mathrm{GL}_m(K)$ とする．$\lambda \in K$ を条件 $(1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m)\lambda = \beta$ により定めることができて，(7.3–1) を満たす $\{a_n\}$ について $a'_n = a_n + \lambda$ と置けば $\{a'_n\}$ は (7.3–1) で $\beta = 0$ とした物を満たすことを示せ．従って $I_m - A \in \mathrm{GL}_m(K)$ の場合には容易に $\beta = 0$ の場合に帰着できる．

このように，漸化式 (7.3–1) を調べる際には A^m が求まると都合が良い（外の手段もある）．それでは A^m はどのように求めるのか，という問題が生じるがこれは数理科学概論 II で扱う．ここでは簡単な場合の例を一つだけ問とする．

問 7.5*. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ と置く．

1) $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と置く．Ap_i, $i = 1, 2, 3$ を求め，それぞれを p_1, p_2, p_3 を用いて表せ．

2) $P = [p_1\ p_2\ p_3]$ と置く．$P \in \mathrm{GL}_3(K)$ が成り立つことを示せ．また，P^{-1} を求めよ．

3) $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ が成り立つことを次の二通りの方法で示せ．

a) 直接 $P^{-1}AP$ を計算する．

[†3]これも定数変化法の類似である．

[†4]$\det(\lambda I_m - A)$ は A の**固有多項式**あるいは**特性多項式**と呼ばれ，固有値を扱う際に頻出する．詳しくは数理科学概論 II で扱う．

b) $P^{-1}AP = D$ と置く．このとき $AP = PD$ が成り立つ．もし D が対角行列で，対角成分が左上から順に d_1, d_2, d_3 なのであれば，$PD = [d_1 p_1\ d_2 p_2\ d_3 p_3]$ が成り立つことを踏まえて 1) の結果を用いて $P^{-1}AP = P^{-1}(PD)$ を「計算」する．
ヒント：この方法では P^{-1} の具体的な形は不要である．

4) $P^{-1}A^nP,\ n \in \mathbb{Z}$ および $A^n,\ n \in \mathbb{Z}$ を求めよ．
※ ここでは P^{-1} の計算を回避することは難しい．

5) 漸化式 $a_{n+3} + a_{n+2} - 4a_{n+1} - 4a_n = 0$ を満たす数列 $\{a_n\}$ を全て求めよ．

6) 漸化式 $a_{n+3} + a_{n+2} - 4a_{n+1} - 4a_n + 2 = 0$ を満たす数列 $\{a_n\}$ を全て求めよ．

問 7.4 の e) から想像されるように，漸化式 (7.3–1)，方程式 $\lambda^m + \alpha_1\lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_m = 0$ と（問 7.4 の）行列 A は関連が深い．方程式が重解を持たない場合には基本的には問 7.5 の状況に帰着される．これは A が「対角化可能」な場合である．この場合は数理科学概論 II で扱う．一方，方程式が重解を持つ場合には，A は「対角化不可能」となり，問 7.5 の状況より複雑になる．この場合は「Jordan 標準形」を用いるなど，何らかの工夫が必要となる．これについては数理科学概論 II で扱うかもしれないし，扱わないかも知れない．

問 7.6. $A \in M_n(K)$ とする．以下の条件は同値であることを示せ．

1) A に行および列基本変形を施して単位行列に変形できる．
2) A に行基本変形を施して単位行列に変形できる．
3) A に列基本変形を施して単位行列に変形できる．

問 7.7. $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．A に基本変形を施すと正則行列が得られるのであった．

1) A の第 i 行を λ 倍（$\lambda \in K,\ \lambda \neq 0$）して得られる行列を B とする．B^{-1} は A^{-1} にどのような基本変形を施して得られるか簡潔に述べよ．
2) A の第 i 行と第 j 行を入れ替えて得られる行列を B とする（ただし $i \neq j$ とする）．B^{-1} は A^{-1} にどのような基本変形を施して得られるか簡潔に述べよ．
3) A の第 i 行に第 j 行の μ 倍（$\mu \in K$，$i \neq j$）を加えて得られる行列を B とする．B^{-1} は A^{-1} にどのような基本変形を施して得られるか簡潔に述べよ．
4) 1)〜3) について,「行」を「列」に置き換えて考えてみよ．

（以上）