２０１５年度数学 II（文科向け，足助担当）　演習問題 3　　　　2015/9/30（水）

注意． 念のため再度述べておくが，具体的な計算については自分で練習して習得するしかないので，講義や配布プリントではあまり扱わない．参考書や演習書で各自補うこと．

全般に，断らない限り K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．

問 3.1. 次の行列の行列式と，存在するのであれば逆行列を求めよ．

1) $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，但し $x \in K$．　　2) $\begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix} \in M_n(K)$．

2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & & a_n \end{bmatrix}$，ただし $a_1, \dots, a_n \in K$．このような行列あるいは転置行列を**コンパニオン行列**と呼ぶ．コンパニオン行列は微分方程式や差分方程式（漸化式を特別な場合として含む）を扱う際にとりわけ重要である．

問 3.2. 1) $A \in M_n(K)$ とする．ある $B \in M_n(K)$ について $AB = I_n$（あるいは $BA = I_n$）が成り立つとする．このとき $\det A \neq 0$ が成り立つことを示せ（従って A は正則である）．また，$BA = I_n$（あるいは $AB = I_n$）が成り立つことを示せ．

※ $AB = BA = I_n$ が成り立つ，というのが A が正則であることの定義であるが，**正方行列**に関しては $AB = I_n$ あるいは $BA = I_n$ の一方が成り立てば，もう一方も成り立ち，A は正則である，というのが 1) の主張である．

2) $m < n$ とする．$A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,m}(K)$ であって，$AB = I_m$ かつ $BA \neq I_n$ が成り立つような物の組を一つ挙げよ．

※ 従って 1) のようなことは正方行列についてのみ成り立つ．

問 3.3. 正則な上三角行列（下三角行列）の逆行列は上三角行列（下三角行列）であることを示せ．

問 3.4. $A \in M_n(K)$ とし，$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ と，$A_{11} \in M_m(K)$ であるように区分けされているとする．

1) A_{12}, A_{21} は共に零行列であるとする（サイズに注意）．このとき，A が正則であることと，A_{11}, A_{22} が共に正則であること（やはりサイズに注意）は同値であることを示せ．また，このとき

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} {A_{11}}^{-1} & O \\ O & {A_{22}}^{-1} \end{bmatrix}$$

が成り立つことを示せ．

※ このように，必ずしもサイズが等しいとは限らない零行列が単に O で表され，混用されることがある．ただし，A_{12} と A_{21} は必ずしも等しくないので,「$A_{12}=A_{21}=O$」とは表さず，例えば「$A_{12}=O,\ A_{21}=O$」と分けて書く．

2) $A_{21}=O$ とする．このとき，A が正則であることと，A_{11}, A_{22} が共に正則であることは同値であることを示せ．また，このとき A^{-1} を A_{11}，A_{12}，A_{22} を用いて表せ．
ヒント：1) がそのまま使えるわけではないが，$A_{12}=O$ が成り立てば 1) の状況であるから，似た結果が得られることが期待される．また，A が上三角行列である場合も特別な場合であるから，問 3.3 も必要に応じて参考にすること．

以降の問は，本格的には数理科学概論 II で扱う内容に関することである．ただし，理解しておくと行列を扱ったり，連立一次方程式の解について調べるときに有用である（ので，本講義でも少し扱う）．

問 3.5 (線型空間，線型写像と関連する)．$A \in M_{m,n}(K),\ B \in M_{l,m}(K)$ とする．

1) $f\colon K^n \to K^m$ を $f(x)=Ax$ により定めることができることを確かめよ（定まっていることが納得できればよい）．
2) $g\colon K^m \to K^l$ を $g(y)=By$ により定める．$h\colon K^n \to K^l$ を $h(x)=g(f(x))$ により定めることができることを確かめよ．
※ h は f と g の**合成写像**と呼ばれ，$g \circ f$ で表される．
3) $h(x)=BAx$ が成り立つことを示せ．
4) f, g, h は K-線型写像である，即ち,（f について言えば）条件
   a) $\forall x, x' \in K^n,\ f(x+x')=f(x)+f(x')$.
   b) $\forall x \in K^n,\ \lambda \in K,\ f(\lambda x)=\lambda f(x)$.
   が成り立つことを示せ（g, h についても調べよ）．

問 3.6 (線型空間の基底に関連する)．$A \in M_n(K)$ とし，$A=[a_1\ \cdots\ a_n]$ と列ベクトルを用いて表す．

1) A が正則であるならば，任意の $y \in K^n$ について，ある $x \in K^n$ が存在して $y=Ax$ が成り立つ（$\forall y \in K^n,\ \exists x \in K^n,\ y=Ax$ が成り立つ）ことを示せ．また，このような x は一意的であることを示せ．
※ 実際には逆も成り立つ．即ち，$\forall y \in K^n,\ \exists x \in K^n,\ y=Ax$ が成り立つならば $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ である．
2) A が正則であるならば，任意の $y \in K^n$ について $x_1, \ldots, x_n \in K$ が一意的に存在して $y=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n$ が成り立つことを示せ．
※ これについても，実際には逆も成り立つ．

（以上）