２０１５年度数学II（文科向け，足助担当）　演習問題 2　　2015/9/23（水）

**注意．** 本講義では，配布する演習問題も含め，具体的な計算（計算問題）についてはあまり触れない．これらは参考書（「教科書」）や演習書で容易に見つかるので，各自で補うこと．

全般に，断らない限り $K$ で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

**問 2.1.** 1) $A \in M_{m,n}(K)$ が $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ と区分けされているとする．$A_{11} \in M_{m_1,n_1}(K)$ であるとき，$A_{12}, A_{21}, A_{22}$ のサイズを決定せよ.

2) $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,l}(K)$ とし，列ベクトル $b_1, \dots, b_l$ を用いて $B = [b_1 \ \cdots \ b_l]$ と表される（区分けされる）とする．このとき，

$$AB = [Ab_1 \ \cdots \ Ab_l]$$

が成り立つことを示せ.

※ この事実は今後多く用いる.

3) $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,l}(K)$ とする．$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$，但し $A_{11} \in M_{m_1,n_1}(K)$, $B_{11} \in M_{n_1,l_1}$ と区分けされているとする．このとき，

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

**定義.** $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$A$ の $(i,j)$-成分を $a_{ij}$ とする．$A$ の**転置行列**を，$M_{n,m}(K)$ の元であって，その $(i,j)$-成分が $a_{ji}$ であるものとして定める（サイズや添字に注意）．$A$ の転置行列を ${}^tA$ で表す.

転置行列は $A^T$, ${}^TA$ などで表されることもある.

**定義.** $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in K^n$ とする．平面ベクトルの場合などとの類推により，$v$ の**長さ**あるいは**ノルム**を

$$\|v\| = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2}$$

により定める（「長さ」あるいは「ノルム」が何であるかは数理科学概論IIで扱う）.

※ $K = \mathbb{C}$ の場合も念頭に置いているので，単に $\sqrt{{v_1}^2 + \cdots + {v_n}^2}$ とはしない.

**定義.** 1) $v \in \mathbb{C}^n$ とする．$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ と表して，$\bar{v} = \begin{bmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{bmatrix}$ と置き，$v$ の**複素共役**と呼ぶ.

$\bar{v} \in \mathbb{C}^n$ である.

2) より一般に $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ とする．$A$ の $(i,j)$-成分を $a_{ij}$ とするとき，$A$ の**複素共役**を，$M_{m,n}(\mathbb{C})$ の元であって，$(i,j)$-成分が $\overline{a_{ij}}$ である物とする．

**問 2.2.** $v \in \mathbb{R}^n$ とする．自然に $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ であるので，$v \in \mathbb{C}^n$ と考え，$\bar{v}$ を定めると $\bar{v} = v$ が成り立つことを示せ．また，逆に $v \in \mathbb{C}^n$ について $\bar{v} = v$ が成り立つならば $v \in \mathbb{R}^n$ であることを示せ．

**問 2.3.** $v \in K^n$ について $\|v\| = \sqrt{{}^t\bar{v}\,v}$ が成り立つことを示せ．

**注.** 転置と複素共役を取る操作はしばしば同時に行われる．そこで（一般的に）$A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ について

$$A^* = \overline{{}^tA} = {}^t\overline{A}$$

と定める．厳密に言えば $\overline{{}^tA} = {}^t\overline{A}$ が成り立つことは確かめなければならないが，ここでは省略する．

**問 2.4.** $a_{ij} \in K$ とする．

1) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ が成り立つことを示せ．

このような行列は**下三角行列**と呼ばれる．

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ が成り立つことを示せ．

このような行列は**上三角行列**と呼ばれる．

3) $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を求めよ（1)，2) を用いるためには一工夫要る）．

※ もう少し複雑な行列の行列式の計算は来週以降扱う．なお，具体的な行列式の計算については数をこなすしか上達の手段はなく，配布プリントだけでは不足なので，各自で参考書などにあたること．

**問 2.5.** 上三角行列であって，かつ下三角行列でもある行列は対角行列であることを示せ．

（以上）