２０１５年度微分積分学（理Ｉ32～35組向け，足助担当）　演習問題　2015/12/7（月）

（前回・前々回の続き．問題番号の前半は「17回」に合わせてあるが，基本的には通し番号である.）Besselの不等式や，次に紹介するParsevalの等式を理解するために，有限次元線型空間に関する次の事実について復習する．

**定理 17.23.** $V$ を $n$ 次元線型空間とし，$\langle\cdot|\cdot\rangle$ を $V$ の内積[†5] とする．また，$\|\cdot\|$ を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ により定まる内積とする[†6]．最後に，$\{e_1,\dots,e_n\}$ を $V$ の $\langle\cdot|\cdot\rangle$ に関する正規直交基底とする．$v\in V$ について $c_k=\langle e_k\mid v\rangle$ と定めれば，$v=c_1e_1+\cdots+c_ne_n$ が成り立つ．また，$\displaystyle\sum_{k=1}^n|c_k|^2=\|v\|^2$ が成り立つ．

これは「線型代数学」で扱われるが，大事なのでここでも証明を付ける．

定理 17.23の証明. $\{e_1,\dots,e_n\}$ は $V$ の基底なので，$a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ が存在して $v=a_1e_1+\cdots+a_ne_n$ が成り立つ．すると

$$\begin{aligned}c_k&=\langle e_k\mid v\rangle\\&=\langle e_k\mid a_1e_1+\cdots+a_ne_n\rangle\\&=a_1\langle e_k\mid e_1\rangle+a_2\langle e_k\mid e_2\rangle+\cdots+a_n\langle e_k\mid e_n\rangle\\&=a_k\end{aligned}$$

が成り立つ．また，

$$\begin{aligned}\|v\|^2&=\langle v\mid v\rangle\\&=\langle c_1e_1+\cdots+c_ne_n\mid c_1e_1+\cdots+c_ne_n\rangle\\&=\sum_{k,l}c_kc_l\langle e_k\mid e_l\rangle\\&=\sum_{k=1}^n|c_k|^2\end{aligned}$$

が成り立つ．□

Besselの不等式に戻る前にもう少し正規直交系について調べる．$V$ を線型空間，$\langle\cdot|\cdot\rangle$ を $V$ の内積とする．$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を正規直交系とすると，定義 15.13と補題 15.12により $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ には余分，あるいは無駄は無いことが分かる．つまり，ある $h_k$ をほかの $h_n$ たちで表すことができないので，どの $h_k$ も省くことができない．実際，$h_k$ を省くと，$h_k$ 自体をほかの $h_n$ 達の有限和ではどうやっても表せなくなる．それでは無限和（極限）を考えれば良いかというと，それでも無理である．今は $F_{T_0}(\mathbb{R})$ の元は $\|\cdot\|$ を用いて区別する，つまり，$f,g\in F_{T_0}(\mathbb{R})$ は $\|f-g\|$ が小さければ近いし，0ならば同じであると考えていることに注意せよ．

[†5] 複素線型空間を考えているのであればエルミート内積である．

[†6] ここでは明示しているが，内積を持つ線型空間について考えるときには，ノルムは特に断らなければ内積により定まる物を考えるのが通常である．ただし，ここでの一連の話でも（内積から定まる）$L^2$-ノルムの外にsup-ノルムを用いているように，断って異なるノルムを用いることも非常に多い．

**問 17.24.** $V$ を線型空間，$\langle \cdot | \cdot \rangle$ を $V$ の内積とする．また，$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を正規直交系とする．$a_n \in \mathbb{R}$ とし，$v_N = \sum_{n=1}^{N} a_n h_n$ とする．

1) $\langle h_0 \,|\, v_N \rangle = 0$ が成り立つことを示せ．
2) $\lim_{N\to+\infty} \|h_0 - v_N\| \geq 1$ が成り立つことを示せ．特に $\lim_{N\to+\infty} \|h_0 - v_N\| = 0$ は成り立たない．
   ヒント：$\sqrt{\langle h_0 - v_N \,|\, h_0 - v_N \rangle}$ を計算してみよ．

従って $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が正規直交系であるならば，極限を考えてもこれらには余分はない．

さて，Bessel の不等式に戻る．$L^2$-内積は $F_{T_0}(\mathbb{R})$ の（あるいは $L^2_{T_0}(\mathbb{R})$ の）内積である．また，定理 17.23 の等式 $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$ の代わりに不等式 $\|v\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$ が成り立っていると考えることができる．もし本当に不等号が成り立つのであれば，それは例えば定理 17.23 で正規直交基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ の代わりに,（ベクトルの数が足りないので）基底ではない正規直交系 $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ を考えているような状況である．このような考え方がいつもうまく行くとは限らないが，$F_{T_0}(\mathbb{R})$，厳密に言えば $L^2_{T_0}(\mathbb{R})$ の場合にはうまく行って，次のように考えることができる．

**定義 17.25.** $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2_{T_0}(\mathbb{R})$ が（Hilbert 空間の意味での）**正規直交基底**，あるいは**完全正規直交系**であるとは，次が成り立つことを言う．

1) $\{h_n\}$ は $L^2$-内積に関して正規直交系である．
2) 任意の $f \in L^2_{T_0}(\mathbb{R})$ について，ある実数列 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して
$$\lim_{N\to+\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^{N} c_n h_n \right\| = 0$$
   が成り立つ．ここでノルムは（ここまでそうであったように） 2-ノルムである．

2) の $\{c_n\}$ は一意的であることが示される．これは有限次元の場合と同様である．

次を示すことができる．証明は現時点でも難しくはないが，それなりに手間がかかるので省略する．

**補題 17.26.** $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が正規直交基底であることと，任意の $f \in L^2_{T_0}(\mathbb{R})$ について $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2$ が成り立つことは同値である．ただし，$c_n = \langle h_n \mid f \rangle$ とする．

Fourier 級数に関して本質的なのは次の定理である．

**定理 17.27.** $f \in L^2_{T_0}(\mathbb{R})$ とする．$\{f_n, g_m\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ は（上のように三角函数を用いて定めると）正規直交基底である．特に,
$$a_n = \langle f_n \mid f \rangle = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f_n(x) f(x) dx,$$
$$b_n = \langle g_n \mid f \rangle = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} g_n(x) f(x) dx$$

と置けば

$$\lim_{N\to+\infty}\left\|f-\sum_{n=0}^{N}(a_nf_n+b_ng_n)\right\|=0$$

が成り立つ．言い換えれば

$$\|f\|^2=\sum_{n=0}^{+\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)$$

が成り立つ（Parseval's identity（パーセヴァルの等式））[†7]．

定理 17.27 の証明はどうにも難しくなるのでここではしない．ただ，当たり前のように用いる Fourier 展開にはこのように理論的な裏付けがあることは大切である．

**定義 17.28.** 定理 17.27 における $\{a_n, b_n\}$ を $f$ の**フーリエ係数**,（取り敢えずは）形式和 $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_nf_n+b_ng_n)$ を $f$ の**フーリエ展開**と呼ぶ.

定理 17.27 は $f\in L^2_{T_0}(\mathbb{R})$ ならば $f$ のフーリエ展開が（$L^2$-ノルムの意味で）$f$ と一致することを意味する（$L^2$-ノルムの意味で一致しても，函数として一致するとは限らない（例えば補題 16.16）ことに注意）．なお，次が成り立つことを示すことができる．

**定理 17.29.** $f\in F_{T_0}(\mathbb{R})$ とし，更に $f$ はリプシッツ連続であると仮定する（従って $f\in C_{T_0}(\mathbb{R})\subset L^2_{T_0}(\mathbb{R})$ が成り立つ）．このとき，$f$ のフーリエ展開は $f$ に一様収束する（即ち，sup-ノルムに関して収束する）．

従って，多くの「自然な」周期函数についてはフーリエ展開は非常に良く振る舞う．しかし，例えば現実的に扱う周期函数の一つである矩形波については定理 17.29 は適用することはできず，実際に成り立たない（もしフーリエ展開が一様収束しているのであれば，収束極限は連続函数のはずである）．また，ここでは三角函数を用いたが，多項式を用いて得られる正規直交基底も存在する（Legendre polynomials など）．これらについて真面目に扱おうとすると，例えば「$L^2_{T_0}(\mathbb{R})$ の元とは何か」といったことや,「$L^2$-収束とは何か」といったことを真剣に考えないといけなくなってくるのでここでは述べない[†8]．

現時点で分かることの大事なことの一つは次のように定式化される．

**定義 17.30.** $\ell^2(\mathbb{N})=\left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,\middle|\,\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2<+\infty\right\}$ と定め，$\mathbb{N}$ 上の $\ell^2$ **(small ell-two) space** と呼ぶ[†9]．

**定理 17.31.** $h_{2n}=f_n,\ n\geq 0,\ h_{2n+1}=g_n,\ n\geq 1$ と定める．$\varphi\colon L^2_{T_0}(\mathbb{R})\to\ell^2(\mathbb{N})$ を

$$\varphi(f)=\{\langle h_n\,|\,f\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$$

により定めれば $\varphi$ は線型同型写像である．

[†7] 厳密に言えば，和の取り方が特別である（$n=m$ としている）ので，少し気持ちが悪いところである．厳密に説明するためには講義で扱ったような，絶対収束に関する議論が要るが，省略する．

[†8] なお，その場合には積分は Lebesgue 積分を用いるなど，ここでの話よりも複雑になる．

[†9] 定まった日本語訳は無いように思う．

おまけ.

ここまでは実数の範囲で頑張ってきたが，複素数を用いてしまうと話は大分見やすくなる．その代わり，迂闊に計算すると実函数を扱っているはずなのにあちこちに虚数単位が現れて，なんだかおかしい，少なくとも直ちには意味が不明，といった事態に陥りがちである．

定義 15.14 において $\{f_n, g_n\}$ を定義したが，オイラーの公式 $e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ を踏まえて次のように定義してみる．

**定義 17.32** (定義 15.14 も参照のこと). $n \in \mathbb{N}$ について $h_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を

$$h_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}, & n = 0, \\ e^{\sqrt{-1}n\omega_0 t} = \exp(\sqrt{-1}n\omega_0 t) = \cos(n\omega_0 t) + \sqrt{-1}\sin(n\omega_0 t), & n > 0 \end{cases}$$

により定める．

$h_n = f_n + \sqrt{-1}g_n$ が成り立つことに注意せよ．

これまでは $F_{T_0}(\mathbb{R})$ などの元は実数値函数としてきたが，$h_n$ のような函数も扱いたいので，複素数値函数も用いて良いことにする（変数は相変わらず実数である）．値として複素数も許していることを表すために，ここでは例えば $F_{T_0}(\mathbb{R})$ の代わりに $F_{T_0}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ などと,「$\mathbb{C}$」を付け加える（一般的な記号ではない）．$F_{T_0}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$, $C_{T_0}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$, $L^2_{T_0}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ は複素線型空間（$\mathbb{C}$-線型空間）である[†10]．また，内積（と従ってノルム）は以下のように変える．

**定義 17.33.** $f, g \in F_{T_0}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ について

$$\langle f \mid g \rangle = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} \overline{f(t)}g(t)dt$$

と定め，***$L^2$*-内積**と呼ぶ[†11]．ここで $\overline{f(t)}$ は $f(t)$ の複素共軛を表す．また，

$$\|f\| = \|f\|_2 = \sqrt{\langle f \mid f \rangle} = \sqrt{\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} |f(t)|^2\,dt},$$
$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,T_0]} |f(t)|$$

と定め，それぞれ**（*$L^2$*-）ノルム**，**sup-ノルム**と呼ぶ.

**問 17.34** (補題 15.15 も参照のこと). $F_{T_0}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ において $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は正規直交系であることを示せ.

定理 17.27 は次のように書き換えることができる．

---

†10 「線型代数学」では無理に複素線型空間やエルミート内積を扱う理由はないように思えたかも知れないが，例えばこのような形で必然的に現れる．また,（あまり理由は変わらないが）電磁気を扱うのであればやはり避けることはできない.

†11 $L^2$-エルミート内積と呼んだ方がより丁寧であるが，エルミート内積を考えているのは当たり前であるので,「エルミート」とわざわざ呼ばないことが多い.

**定理 17.35.** $f \in L^2_{T_0}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ とする．$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は（上のように指数函数を用いて定めると）正規直交基底である．特に，

$$d_n = \langle h_n \mid f\rangle = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} h_n(x)f(x)dx$$

と置けば

$$\lim_{N\to+\infty}\left\| f - \sum_{n=0}^{N} d_n h_n \right\| = 0$$

が成り立つ．言い換えれば

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |d_n|^2$$

が成り立つ（Parseval's identity）．

値が複素数となっても，sup-ノルムとの関係などの，ここで扱ったような基本的な事柄は同様に成り立つ．更に詳しいことが必要である場合には積分

$$\langle h_n \,|\, f\rangle = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} e^{-\sqrt{-1}n\omega_0 t} f(t)dt$$

について調べることになる．

ところで，今は周期的な函数に限って話をしてきたが，周期的とは限らない函数でも一定の条件が満たされれば，無理矢理「周期的」と考えてここまでの話に乗せることができる．

**定義 17.36.** $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ とする（値は $\mathbb{C}$ に取っても良い）．$f$ の**台**（support）を

$$\overline{\{t\in\mathbb{R} \,|\, f(t)\neq 0\}}$$

により定め，$\operatorname{supp} f$ で表す．ここで $\overline{\{t\in\mathbb{R} \,|\, f(t)\neq 0\}}$ は $\{t\in\mathbb{R} \,|\, f(t)\neq 0\}$ に端点を付け加えて得られる集合（閉包）を表す[†12]．

$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ とし，$\operatorname{supp} f$ が有界であるとする．この時には，ある $R>0$ が存在して $\operatorname{supp} f \subset (-R,R)$ が成り立つ．このとき，$t\in\mathbb{R}$ について $[t]$ を「$t$ を $R$ で割った余り」とする．即ち，$t\in[nR,(n+1)R)$ なる（唯一の）$n$ について $[t]=t-nR$ と定める．そして，$g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$g(t) = \begin{cases} f([t]), & [t]\in\operatorname{supp} f,\\ 0, & [t]\notin\operatorname{supp} f\end{cases}$$

により定める．

**問 17.37.** $g|_{(-R,R)} = f$（左辺は $g$ の $(-R,R)$ への制限を表す）及び $g\in F_{T_0}(\mathbb{R})$ が成り立つことを示せ．

従って，$g$ についてはフーリエ展開を用いて調べることができて，それは $f$ についてもそれなりの情報を与えると期待される．一般にはここまで話は単純ではないが，理論上も応用上も重要である．

（以上）

[†12] 例えば $(0,1)$ の閉包は $[0,1]$ である．また $(0,1]$ の閉包は $[0,1]$ である．区間が二つ以上ある場合は次のようになる．例えば $(0,1)\cup(2,3)$ の閉包は $[0,1]\cup[2,3]$ である．また，$(0,1)\cup(1,2)$ の閉包は $[0,1]\cup[1,2]=[0,2]$ である．