２０１５年度微分積分学（理 I 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 １６　2015/11/30（月）
（前回の続き．問題番号の前半は「16 回」に合わせてあるが，基本的には通し番号である．）

sup-ノルムと 2-ノルムには例えば次のような関係がある．

補題 16.16. $f \in F_{T_0}(\mathbb{R})$ について，$\|f\| \leq \sqrt{2}\|f\|_\infty$ が成り立つ．特に，$\|f\|_\infty = 0$ ならば $\|f\| = 0$ が成り立つ．後半について，逆は成り立たない．即ち，$\|f\| = 0$ かつ $\|f\|_\infty \neq 0$ が成り立つような $f \in F_{T_0}(\mathbb{R})$ が存在する．特に，前半の不等号について，真に不等号が成り立つことがある．

<u>証明</u>. $\|f\|_\infty = +\infty$ ならば不等式は形式的に成り立つ[†3]．$\|f\|_\infty = M < +\infty$ とする．このとき

$$\|f\|^2 = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} |f(t)|^2\,dt \leq \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} M^2 dt = 2M^2$$

が成り立つ．一方，例えば $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(t) = \begin{cases} 1, & \exists n \in \mathbb{N},\ t = nT_0, \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases}$ により定めれば $\|f\| = 0$ であるが $\|f\|_\infty = 1$ である．□

補題 16.16 は L^2 ノルムが sup-ノルムよりも「鈍感」であることを意味している．それでは L^2-ノルムは sup-ノルムと比べて劣っているのかというと，そうではない．例えば L^2-ノルムは（L^2-）内積により定まるが，sup-ノルムはそうではない（問 16.17）．$f \in F_{T_0}(\mathbb{R})$ を f_n や g_m の和で表せるとして，その係数は内積を用いて表すことができる（問 16.17 の後で述べる）．これには $\{f_n, g_m\}$ が内積に関して正規直交系（実際には正規直交基底）であることが効いている．一方，sup-ノルムに関してはこのようなことはできない．

問 16.17.

1) V を線型空間とする．また，$\langle\cdot|\cdot\rangle$ を V の内積とし，$\|\cdot\|$ を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ により定まるノルムとする．このとき，

$$\frac{\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2}{2} = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

が成り立つことを示せ．
ヒント：素直に右辺を計算すれば良い．なお，複素線型空間のエルミート内積に関しても同様のことが成り立つ．

2) $f, g \in F_{T_0}(\mathbb{R})$ を

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \exists n \in \mathbb{Z},\ n \leq t < n + \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \exists n \in \mathbb{Z},\ n + \dfrac{1}{2} \leq t < n+1, \end{cases}$$
$$g(t) = 1 - f(t)$$

により定める．$\|f\|_\infty$, $\|g\|_\infty$, $\|f+g\|_\infty$, $\|f-g\|_\infty$ を求めよ．

[†3] $f \in F_{T_0}(\mathbb{R})$ であれば $f(t+T_0) = f(t)$ かつ $[0, T_0]$ 上 f はリーマン可積分であるから f は有界である．従ってこの場合は実際には起きないが，f を（ルベーグ可積分，ではなく）単にルベーグ可測とするとこのようなことを気にする必要が生じる．一方，f をルベーグ可積分とすれば話はあまり変わらない．

3) $\|f\|_\infty^2 = \langle f \mid f\rangle$ が成り立つような $F_{T_0}(\mathbb{R})$ の内積は存在しないことを示せ．従って，$\|\cdot\|_\infty$ は内積により定めることができない．

さて，$f \in F_{T_0}(\mathbb{R})$ とし，$f = a_0 f_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n f_n + b_n g_n)$ と表されたとする．以下では $g_0 = 0$ と約束し，この和を $\sum_{n=0}^{N} (a_n f_n + b_n g_n)$ で表す．すると，

$$\begin{aligned}\langle f_k \mid f\rangle &= \left\langle f_k \,\middle|\, \sum_{n=0}^{N} (a_n f_n + b_n g_n)\right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_n \langle f_k \mid f_n\rangle + \sum_{n=1}^{N} b_n \langle f_k \mid g_n\rangle \\ &= a_k\end{aligned}$$

が成り立つ．同様に $\langle g_l \mid f\rangle = b_l$ が成り立つ．つまり，a_n や b_m は $\{f_n, g_m\}$ と内積を用いて f から求めることができる．ところで，任意の $f \in F_{T_0}(\mathbb{R})$ が $f = \sum_{n=0}^{N} (a_n f_n + b_n g_n)$ と表される訳ではない．実際，このような形をした函数は少なくとも C^∞ 級（実際には C^ω 級）である．そこで，うまく行くかどうかはともかく，N を無限大にして良いことにしてみる．より正確には，$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (a_n f_n + b_n g_n)$ と表される函数を考える．直感的には，上と同じように f_n や g_m との内積を取れば a_n, b_m が求まると考えられるが，内積は積分で定義されていて，極限を用いている．一方，無限和も極限を用いて定めるので，例えば

$$\left\langle f_k \,\middle|\, \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n f_n + b_n g_n)\right\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f_k \mid a_n f_n + b_n g_n\rangle$$

のような計算をしようとすると極限を交換する操作が必要となる（なお，右辺が a_k に等しいことは容易に分かる）．既に見てきたように，このような操作はうまく行くこともあるし，行かないこともある．また，そもそも $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (a_n f_n + b_n g_n)$ が何らかの意味で収束しているのか，ということも問題である．まず後者について考える．次が成り立つ．

命題 16.18. $f \in F_{T_0}(\mathbb{R})$ とする．$\lim_{N\to+\infty} \left\| f - \sum_{n=0}^{N} (a_n f_n + b_n g_n)\right\|_\infty = 0$ が成り立つことと，$\sum_{n=0}^{N} (a_n f_n + b_n g_n)$ が $N \to +\infty$ で f に $\mathbb{R}$ 上一様収束することは同値である．

証明. 現れる函数は全て $f(t+T_0) = f(t)$ を満たすので，

$$\begin{aligned}\left\| f - \sum_{n=0}^{N} (a_n f_n + b_n g_n)\right\|_\infty &= \sup_{t\in[0,T_0]} \left| f(t) - \sum_{n=0}^{N} (a_n f_n(t) + b_n g_n(t))\right| \\ &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| f(t) - \sum_{n=0}^{N} (a_n f_n(t) + b_n g_n(t))\right|\end{aligned}$$

が成り立つ．主張はこのことから従う． $\square$

これを踏まえて次のように定める．

定義 16.19. $f \in F_{T_0}(\mathbb{R})$ とする． $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left\|f-\sum_{n=0}^{N}(a_nf_n+b_ng_n)\right\|_2 = 0$ が成り立つとき， $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(a_nf_n+b_ng_n)$ は $N\to+\infty$ で f に L^2**-収束**すると言う．

注 16.20. $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(a_nf_n+b_ng_n)$ が f に一様収束するのであれば極限は理解しやすい．実際，極限は f そのものである．それでは L^2-収束の場合には何なのか，というのは大事な問題であるが，ここではまだ準備不足で扱えない．興味があれば例えば ルベーグ積分入門，伊藤清三著，裳華房などを参照のこと．これはこの後に全般についてもそうである．

補題 16.16 により次が成り立つ．

補題 16.21. $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left\|f-\sum_{n=0}^{N}(a_nf_n+b_ng_n)\right\|_\infty = 0$ ならば $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left\|f-\sum_{n=0}^{N}(a_nf_n+b_ng_n)\right\|_2 = 0$ が成り立つ（ノルムが異なることに注意）．

従って，$\displaystyle t\mapsto\sum_{n=0}^{N}(a_nf_n(t)+b_ng_n(t))$ が f に $N\to+\infty$ で一様収束するならば L^2-収束する．

さて，$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $L^2_{T_0}(\mathbb{R})\subset F_{T_0}(\mathbb{R})$ の正規直交系とする．ここでは添字は自然数にしているが，例えばここまで考えてきたような $\{f_n,g_m\}$ であるとか，複素数を用いる場合には $k_n(t)=e^{2\pi\sqrt{-1}nt}$ として $\{k_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を考えるような，うまく番号を付け替えれば $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の形に直せる物であれば何でも良い．

このとき，$f\in F_{T_0}(\mathbb{R})$ について，

$$c_n=\langle h_n \mid f\rangle=\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0}h_n(t)f(t)dt$$

と置くと，次が成り立つ．

定理 16.22 (Bessel's inequality（Bessel の不等式）). $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n|^2\le\|f\|^2$ が成り立つ．

ここでの話で言えば重要なのは $\{f_n,g_m\}$ を考えている場合である．この時には，Bessel の不等式は

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)\le\|f\|^2$$

と読み替えられる．

定理 16.22 の証明. $\|f\| = +\infty$ ならば何も示すことはないので，$\|f\| < +\infty$ とする．$f_N = \sum_{n=0}^{N} c_n h_n$ と置く．すると

$$\begin{aligned}\|f - f_N\|^2 &= \langle f - f_N \mid f - f_N \rangle \\ &= \langle f \mid f \rangle - 2\langle f_N \mid f \rangle + \langle f_N \mid f_N \rangle\end{aligned}$$

が成り立つ．一方，

$$\begin{aligned}\langle f_N \mid f \rangle &= \left\langle \sum_{n=0}^{N} c_n h_n \middle| f \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N} \langle c_n h_n \mid f \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N} c_n \langle h_n \mid f \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2\end{aligned}$$

が成り立つ．また，

$$\begin{aligned}\langle f_N \mid f_N \rangle &= \left\langle \sum_{m=0}^{N} c_m h_m \middle| \sum_{n=0}^{N} c_n h_n \right\rangle \\ &= \sum_{n,m} \langle c_m h_m \mid c_n h_n \rangle \\ &= \sum_{n,m} c_n c_m \langle h_m \mid h_n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$0 \leq \|f - f_N\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2$$

が成り立つ[†4]．従って $\sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 \leq \|f\|^2$ が成り立つ．左辺の和は N に関して単調増加であって，また $\|f\|^2 < +\infty$ としているので $N \to +\infty$ とすると極限が存在し，Bessel の不等式を得る． □

まだ続くが，今回はここまで.

（以上）

[†4] 複素数の範囲で考えているときにはエルミート内積を考える．この場合にも結論自体は変わらないが，途中の議論には所々注意が必要になる.