２０１５年度微分積分学（理 I 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 １０　2015/10/5（月）
'15/11/2：問 10.2 2) の誤植を修正（極座標がおかしかった）.

問 10.1. $l\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $l(t) = t$ により定める．l により定まる曲線の長さは $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{dl}{dt}(t)\right| dt = 1$ である．これを踏まえて以下の問に答えよ.

1) $l_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $l_1(t) = \sin\dfrac{\pi}{2}t$ により定める．l_1 により定まる曲線の長さを求めよ．また，l と l_1 により定まる曲線を図形として比較せよ.
2) $l_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $l_2(t) = \cos\left(\left(t - \dfrac{1}{2}\right)\pi\right)$ により定める．l_2 により定まる曲線の 長さを求めよ．また，l と l_2 により定まる曲線を図形として比較せよ.
3) $s \in [0,1]$ とする．上の l_2 について $\displaystyle\int_0^s \frac{dl_2}{dt}(t)dt$ を求めよ.
4) $l_3\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を C^1 級の函数であって $l_3(0) = 0, l_3(1) = 1$ をみたすものとする．$s \in [0,1]$ について $\displaystyle\int_0^s \frac{dl_3}{dt}(t)dt$ を求めよ．また，$L(l_3) = \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{dl_3}{dt}(t)\right| dt$ と置くと，$L(l_3) \geq 1$ が成り立つことと，l_3 を適当に選べば $L(l_3)$ の値はいくらでも大きくできることを示せ.

問 10.2 (この問では $\mathbb{R}^n$ の元を列ベクトルを用いて表す).

1) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $v = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ について $\varphi(v) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ と置くことにより定める．$D\varphi$ を求め，$\det D\varphi(r,\theta) \gtreqless 0$ となる (r,θ) の範囲を図示せよ．また，$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^2 級の函数とするとき，$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ と置く．Δf を $\dfrac{\partial f}{\partial r}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ 等を用いて 表せ．Δf を f のラプラシアン（Laplacian），$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を（函数に函数を対応させる）作用素と看做してラプラシアンあるいはラプラス作用素（Laplacian, Laplace operator）と呼ぶ.
2) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $v = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ について $\varphi(v) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta\cos\psi \\ r\sin\theta\sin\psi \end{pmatrix}$ と置くことにより定める．また，$\mathbb{R}^3$ 上のラプラス作用素を $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ により定める．これらについて 1) と同様の作業を行い，$\varphi(v)$ を図示せよ.

※ 当座は積分とはあまり関係ないが，実際には偏微分方程式において非常に重要である.

問 10.3. 以下の積分（積分値）に関する問に答えよ．3) に関しては直接証明しても 構わないし，講義で示した定理を適宜用いても良い.

1) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ 4x^2 + 9y^2 \geq 1\}$ とするとき，$\displaystyle\int_S dxdy$ を求めよ.
2) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ 4x^2 + 9y^2 \geq 1\}$ とするとき，$\displaystyle\int_S (x+y)dxdy$ を 求めよ.
3) $P = [0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$ とし，$l\colon [0,1] \to P$ を l に含まれる C^1 級の正則な曲線とする．また，$l([0,1]) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in [0,1],\ x = l(t)\}$ と置く．さて，$f\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とし， $g\colon P \to \mathbb{R}$ を函数であって，$P \setminus l([0,1])$ 上 f と一致するものとする．このとき g も P 上可積分であって，$\displaystyle\int_P g(x)dx = \int_P f(x)dx$ が成り立つことを示せ.

以下では積分の座標変換（変数変換）について，多少厳密さを無視して考察する．まず，一変数の場合には次が成り立つのであった（講義で扱ったものより少し簡略化してある）．

定理. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続とし，$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^1 級とする．$a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$ とし，また，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ について $g(\alpha) = a, g(\beta) = b$ が成り立つとすると

(10.4)
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f \circ g(t) Dg(t) dt = \int_\alpha^\beta f \circ g(t) \frac{dg}{dt}(t) dt$$

が成り立つ．

二変数函数について，変数変換公式がどうなるべきか考えてみる．そこで，$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ であって，$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は C^1 級とする．g は二変数函数であるが，C^1 級なので全微分 Dg が存在し，連続である．そこで安直に式 (10.4) をまねして，$\mathbb{R}^2$ 内の有界閉集合 K, X について $K = g(X)$ が成り立ち，$g\colon X \to K$ と看做すと全単射であるとき

(嘘の式１)
$$\int_K f(x,y) dxdy = \int_X f \circ g(t,s) Dg(t,s) dtds$$

が成り立つと期待してみる．しかしこれは全く破綻している．左辺については f は実数値函数なので通常の積分であるが，右辺については $f \circ g(t,s)Dg(t,s)$ は行列値函数なので，仮に積分できたとしても値は行列になってしまう．そこで積分の定義に戻ってみる．$\int_K f(x,y)dxdy$ は，K を閉区間の直積の集まり $\{I_k\}$ で近似して，$c_k \in I_k$ を任意に定めて和 $\sum c_k v(I_k)$ を考え，分割を細かくしていった時の極限値であった．ここで $v(I_k)$ は I_k の体積（面積，長さ）である．一変数の場合に戻り，式 (10.4) の右辺にこれを当てはめてみると，$\int_\alpha^\beta f \circ g(t) Dg(t) dt$ というのは $(f \circ g)Dg$ に関して上のように積分を考えたということになるが，見方を変えると $f \circ g$ について $v(I_k)$ の代わりに $Dg(c_k)v(I_k)$ を考えて値を定めたとも看做せる．最後の $Dg(c_k)v(I_k)$ は直感的には次のような値であると理解できる（例によって本当は証明が必要なことである）．g は C^1 級なのであるから $g(t)$ は $t = c_k$ の近くでは大雑把には $g(c_k) + Dg(c_k)(t - c_k)$ により近似される．後者の函数により I_k を写して得られる $\mathbb{R}$ の部分集合を J とすると $v(J) = Dg(c_k)v(I_k)$ が成り立つ（$Dg(c_k) = 0$ であったり，$Dg(c_k) < 0$ である場合には右辺は長さとは言い難いが，ここではおおらかに考えているのでまあいいことにする）．従って $Dg(c_k)v(I_k)$ は $v(g(I_k))$ に等しいことが期待される．さて，このようなことが二変数の場合にも成り立つと楽観すると，次が成り立つはずである．

(嘘の式２) 条件 $Dg(t,s) \neq 0$ が $(t,s) \in X$ について成り立つならば

$$\int_K f(x,y)dxdy = \lim_{\delta(\Delta) \to 0} \sum_{I_k \in \mathcal{I}(\Delta)} f \circ g(c_k)(I_k \text{ を } g \text{ で写して得られる図形の面積})$$

ここで「I_k を g で写して得られる図形の面積」について考えてみる．一変数の時と同様に，g が C^1 級であることを用いて，$(t,s) = c_k$ の近くで g は $g(c_k) + Dg(c_k)\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$ で近似されることを

用いると，近似的には「I_k を g で写して得られる図形の面積」は $|\det Dg(c_k)|\, v(I_k)$ で与えられることがわかる（証明は線型代数（行列式）の範疇である（しかもそれなりに長い）ので，ここではしない）．一変数の場合の変数変換の公式 (10.4) には絶対値は出てこないので，行列式の絶対値は外してしまうことにした上で，ここまでの話を信じるのであれば，期待できる式は次のようなものになる．

(嘘の式２’)
$$\int_K f(x,y)dxdy = \int_X f\circ g(t,s)\det Dg(t,s)dtds$$
が成り立つ．

しかし，よく考えるとこれもおかしい．例えば $K = X = [0,1]\times[0,1], f = 1$ とし，$g(t,s) = (1-t, s)$ とする．左辺は 1 であることが容易にわかる．右辺については
$$\int_X f\circ g(t,s)\det Dg(t,s)dtds = \int_X (-1)dtds = -1$$
が成り立つ．これは「$dxdy$」や「$dtds$」が，一変数の場合の「行ったり来たり」にあたる現象をきちんと反映していないことに起因する（一方,「dx」や「dt」はきちんと反映しているので話が破綻しない．二つ以上「掛ける」と話が変わってしまうのである）．(嘘の式２’) は図形の「向き」という概念を用いるときちんと書き直すことができるが，ここでは次で満足しておくことにする．一変数の場合には「行ったり来たり」が起きないための条件は $v(g(I_k)) \neq 0$ が常に成り立つことであったので，これの二変数版を考える．すると条件は $\det Dg(t,s) \neq 0$ となる．これを仮定し，次を期待する．

(10.5) 条件 $\det Dg(t,s) > 0$ が $(t,s) \in X$ について成り立つならば
$$\left|\int_K f(x,y)dxdy\right| = \left|\int_X f\circ g(t,s)\det Dg(t,s)dtds\right|$$
が成り立つ（条件は $\det Dg(t,s) < 0$ としてもよい）．絶対値がついているのは，一変数の場合でいえば g で写すと左右が入れ替わるような事態を想定しているからである．あるいは，第 9 回で述べたように，g に一定の仮定を置いて，$Dg(t,s)$ に絶対値を付け（る代わりに全体の絶対値は外し）ても良い．これらは f や g にそれなりの仮定を置けば証明可能な事実であるので，後日講義で扱う．

問 10.6. $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，$\Psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をそれぞれ
$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta),$$
$$\Psi(r,\theta,\varphi) = (r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)$$
によりそれぞれ定める．

1) $\Phi(r,\theta)$ および $\Psi(t,\theta,\varphi)$ を図示せよ．
2) $S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ -1 \le \tan\dfrac{y}{x} \le 1\}$ と置く．$\displaystyle\int_S dxdy$ を求めよ．

3) $r \geq 0$ とし，$S_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}$ と置く．$F(r) = \displaystyle\int_{S_r} dxdydz$ を求めよ．また，$\dfrac{dF}{dr}(r)$ を求めよ．

問 10.7. $v, w \in \mathbb{R}^3$ とする．$S = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \exists t, s, \in \mathbb{R},\ t \geq 0,\ s \geq 0,\ t+s \leq 1,\ u = tv+sw\}$ と置く．

1) $v = {}^t(1\ 0\ 0), w = {}^t(0\ 1\ 1)$ の時 S を図示せよ．また，一般の場合 S はどのような図形であるか説明せよ（直感的でよい）．

2) $A = (v\ w) \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ とし，$v(S) = \sqrt{\det {}^tAA}$ と置く．v, w が共に xy-平面，yz-平面，zx-平面のいずれか一つ（P とする）に含まれるとき，$v(S)$ は $P \cong \mathbb{R}^2$ 内の図形と看做したときの S の面積に等しいことを示せ．
※ $\mathbb{R}^3$ 内の図形の「面積」を適切に定義すると $v(S)$ は S の面積となる．

変数変換公式の直感的な導出を踏まえて次のように定める．

定義. $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ を C^1 級とし，$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ のとき $\operatorname{rank} Df(x,y) = 2$ が成り立つとする．$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in [0,1],\ z = f(x,y)\}$ と置く．このとき，$F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$ と置き，

$$S(\Sigma) = \int_{[0,1]^2} \sqrt{\det {}^tDF(x,y)DF(x,y)}dxdy$$

と定める（曲線の長さとの類似に注意せよ．曲線の場合には $F(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ となり，$DF(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ Df(x) \end{pmatrix}$ である）．

問 10.8. 1) $f(x,y) = \cosh(x^2+y^2) = \dfrac{e^{x^2+y^2} + e^{-(x^2+y^2)}}{2}$ と置く．$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ z = f(x,y)\}$ とするとき，$S(\Sigma)$ を求めよ．
※ 必要に応じて変数変換してよいが，現時点では，積分区間（本当は区間ではないが，一変数の場合に準じてここではこのように呼ぶことにする）の境界での処理を厳密に行うのは難しいはずである．どこが曖昧になっているかも考えよ．最終的には境界での処理も厳密にできることが期待される．

2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は正の値をとる C^1 級の函数とする．xyz-空間において，xy-平面における f のグラフを x 軸の周りに回転させて得られる図形のうち，$0 \leq x \leq 1$ の部分を Σ とする．すなわち，$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2 = f(x)^2,\ 0 \leq x \leq 1\}$ とする．このとき Σ の面積は $2\pi \displaystyle\int_0^1 f(x)\sqrt{1+Df(x)^2}dx$ で与えられることを上の定義を 用いて示せ．
ヒント：まず Σ をある函数 F のグラフとして表す．全体を一度には扱えないので Σ を適当に分割する必要がある．

（以上）