２０１５年度微分積分学（理I 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 ９　　2015/9/28（月）
'15/11/2：問 9.6 の誤植を修正（函数 k の定義を修正）.

問 9.1.　1) 次の不定積分を求めよ．ただし $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}^+$ とする．

$$1) \int \frac{dx}{(x-a)^k} \qquad 2) \int \frac{dx}{(x^2+b^2)^k} \qquad 3) \int \frac{xdx}{(x^2+b^2)^k} \qquad 4) \int \frac{cx+d}{((x-a)^2+b^2)^k}dx$$

5) f, g を 0 ではない実係数の多項式とする．また，f は

$$f(x) = a(x-a_1)^{k_1} \cdots (x-a_r)^{k_r}((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2)^{l_1} \cdots ((x-\alpha_s)^2+\beta_s^2)^{l_s}$$

と，実数の範囲で既約分解されるとする．表す．このとき，$\displaystyle\int \frac{g(x)}{f(x)}dx$ を一般的に表せ.

問 9.2. R を z, w に関する有理式とする．このとき $t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置けば

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

が成り立つことを示せ．従って，$\sin x,\ \sin y$ の有理函数の積分は,（通常の意味での）有理函数の積分に帰着できる.

※ 講義でも示したように，$t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置くのが常に得策というわけではない.

以下は多変数函数の積分に関する変数変換の準備である.

問 9.3. $P = [s,t] \times [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^2$ と置く．また，$\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ により定める（以下では微分などを考えるので，ここでは列ベクトルを用いて表す）.

1) Φ は C^∞ 級であることを示せ．また，$D\Phi$ を求めよ.
2) Φ が単射であるような s, t, α, β に関する条件を求めよ．但し，$s \geq 0$ とする.
3) $P = [0,R] \times [\alpha,\beta]$ とする．$p_1, p_2 \in P$ について，条件「$p_1 \neq p_2,\ \Phi(p_1) = \Phi(p_2)$ ならば $p_1, p_2 \notin (0,R] \times (\alpha,\beta)$ が成り立つ」成り立つような α, β の条件を求めよ.
4) r 軸，θ 軸や，これらに平行な直線が Φ にどのように写されるか調べ，図示せよ.
5) $\det D\Phi$ を求めよ.

問 9.4. $0 \leq s \leq t,\ 0 \leq \alpha_i \leq \beta_i \leq \pi$（$1 \leq i \leq n-2$），$0 \leq \alpha_{n-1} \leq \beta_{n-1} \leq 2\pi$ とし，$P = [s,t] \times [\alpha_1, \beta_1] \times \cdots \times [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]$ と置く．また，$\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$\Phi(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) = (r\cos\theta_1, r\sin\theta_1\cos\theta_2, \ldots, r\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, r\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-1})$$

により定める（本当は列ベクトルで表したいところだが，場所を取るのでいつも通りにした）.

1) Φ は C^∞ 級であることを示せ.
2) $D\phi$ 及び $\det D\Phi$ を求めよ.
3) $p_1, p_2 \in P$ について，$p_1 \neq p_2$ かつ $\Phi(p_1) = \Phi(p_2)$ が成り立つための条件を調べよ.

4) $n=3$ とする．r 軸，θ_i 軸や，これらに平行な直線が Φ にどのように写されるか調べ，図示せよ．

問 9.5. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とし，$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f(v)=Av$ により定める（ただし，v は列ベクトルと考えている）．ここで，定義域の $\mathbb{R}^2$ の座標を (x,y)，値域の $\mathbb{R}^2$ の座標を (z,w) とする．最後に，$P=[0,1]\times[0,1]$，$Q=f(P)$ と置く．$\displaystyle\int_Q 1dzdw = |\det A|$ が成り立つことを，積分を定義に従って（リーマン和，あるいは過剰和・不足和を調べることにより）示せ．

問 9.5 は，後日扱う積分の変数変換の一番簡単な場合である．$\det A$ に絶対値が付いていて一変数の場合と異なるように見えるが，以下に述べるようにそうでもない．

問 9.6. $P=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$Q=[0,1]$ とする．また，$h\colon Q\to\mathbb{R}$ は連続とする（実際にはリーマン可積分とすれば十分である）．

1) $f\colon P\to Q$ を $f(t)=\sin t$ により定めると，$\displaystyle\int_P \frac{df}{dt}(t)dt=\int_Q 1dx$ が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\int_P h\circ f(t)\frac{df}{dt}(t)dt=\int_Q h(x)dx$ が成り立つことを示せ．
2) $g\colon P\to Q$ を $g(t)=1-\sin t$ により定めると，$\displaystyle\int_P \frac{dg}{dt}(t)dt=-\int_Q 1dx$ が成り立つことを示せ．また，$\displaystyle\int_P h\circ g(t)\frac{dg}{dt}(t)dt=-\int_Q h(x)dx$ が成り立つことを示せ．

f も g も P から Q への C^1 級の全単射であって，逆写像は連続かつ $(0,1)$ 上 C^1 級である[†1]．したがって，f や g は P と Q の同一視を（何らかの意味で[†2]）与えているが，P 上の積分と Q 上の積分が f の場合には一致し，g の場合には符号が逆になっている．これは，f が増加函数なのに対し，g が減少函数であることによる．今の場合には直感的には明らかなように，f により P から定まる Q の向きは Q の元々の向きと一致している一方，g により P から定まる Q の向きは逆である．このように，変数変換（置換積分）の公式

$$(*)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(f(t))Df(t)dt=\int_{f(0)}^{f(\frac{\pi}{2})} h(x)dx$$

（f は g でもよい）から，P 上の積分と Q 上の積分を比べる公式を得ようとすると，$f(0), f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ の大小関係が問題となってしまう．問 9.5 と，$(1,1)$-行列については $\det(a)=a$ であることを踏まえて，次のように考えればこの問題は（少なくとも今の場合）回避できる．まず，$Dg(x)$ に絶対値をつけて，両辺を P 上と Q 上のリーマン積分に置き換えて

$$(**)\qquad \int_P h(f(t))\left|Df(t)\right|dt=\int_Q h(x)dx$$

が（f を g としても）成り立つと期待してみる．

---

†1 実際には f^{-1} は $[0,1)$ 上，g^{-1} は $(0,1]$ 上 C^1 級である．

†2 少なくとも変数変換に用いて良い程度の同一視を与えている．詳しくは後日扱う．

3) 実際に $(**)$ が f, g について成り立つことを示せ．

しかし，今度は次のような問題が起きる．$k\colon P \to Q$ を $k(t) = \dfrac{1-\cos 6t}{2}$ により定める．

4) $k(P) = Q$ かつ $k(0) = 0,\ k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ が成り立つことを示せ．

5) f を k に置き換えると，$(*)$ は成り立つが，$(**)$ は成り立たないことを示せ．これは k を通じて P が Q を 3 回覆ってしまっていることによる．

6) $x \in (0, 1)$ とする．$k^{-1}(x)$ は 3 点からなることを示せ．

ここで扱ったような，変数変換による積分の振る舞いの，積分区間を「向き」まで込めた場合と込めない場合の違いは多変数函数の積分についても同様である．多変数函数の場合の「向き」の扱いは難しいので「ベクトル解析」で扱い，この講義では「向き」を考えなくて良い方を後日扱う．

（以上）