２０１５年度微分積分学（理 I 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 8　　2015/9/21（月）

問 8.1. $P = [-1,1] \times \cdots \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^n$ とする．

1) $f\colon P \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = (0,\dots,0), \\ 0, & x \neq (0,\dots,0) \end{cases}$$

により定める．f は可積分であって，$\displaystyle\int_P f(x)\,dx = 0$ が成り立つことを示せ．

2) $g\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分な函数とする．$Z = \{p_1,\dots,p_k\} \subset P$ とし，$g'\colon P \to \mathbb{R}$ は $P \setminus Z$ 上で $g' = g$ を満たすとする（g' は g と Z 以外では一致しているとする）．この時，g' も P 上可積分であって，$\displaystyle\int_P g'(x)\,dx = \int_P g(x)\,dx$ が成り立つことを示せ．
※ 2) は 1) を特別な場合として含むので，直接リーマン和（あるいは不足和，過剰和）を評価して両者を一度に示してもよい．あるいは，1) を用いて 2) を示すこともできる．この場合には 1) はあらかじめ示しておく必要がある．

問 8.2. $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ により定める．

1) $\Delta = \{0 = x_0, x_1, \dots, x_k = 1\}$ を $[0,1]$ の分割とする．不足和 $\underline{s}(f;\Delta)$ と過剰和 $\overline{s}(f;\Delta)$ を求めよ．

2) f は $[0,1]$ 上可積分でないことを示せ．

なお，f は Lebesgue 可測であって，この意味では $\displaystyle\int_{[0,1]} f(x)\,dx = 0$ が成り立つ.「可積分ではない」としてしまうのと，どちらが自然なのかは立場による．

問 8.3. $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ について $\|A\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}^2}$ と置く．$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ について $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$ が成り立つことを示せ．また，$\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr} {}^tA\,A}$ が成り立つことを示せ．
※ $\sqrt{\operatorname{tr} {}^tA\,A}$ は $\sqrt{\operatorname{tr}({}^tA\,A)}$ と表した方が丁寧であるが，一般に積は和より優先順位が高いので，括弧は無理につける必要は無い．

ヒント：まず $m = l = 1$ の場合について示す（(コーシー・）シュワルツの不等式）．一般の場合は $m = l = 1$ の場合を用いれば示せる．例えば $m = 2, n = 3$ 位で考えてみるのもよい．

定理 (代数学の基本定理). f を複素数を係数とする，0 ではない多項式とし，f の次数を $\deg f$ で表す．このとき，$a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \gamma_1, \ldots, \gamma_s \in \mathbb{C},\ k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{N}$（ただし，$\gamma_i$ 達は互いに相異なり，また，$k_1, \ldots, k_s \neq 0$）が一意的に存在して $k_1 + \cdots + k_s = \deg f$ かつ

$$f(z) = a(z - \gamma_1)^{k_1} \cdots (z - \gamma_s)^{k_s},$$

が成り立つ．

問 8.4. 必要であれば代数学の基本定理を用いて以下を示せ．

1) f を実数を係数とする，0 ではない多項式とし，f の次数を $\deg f$ で表す．$a, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R},\ k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}, \gamma_1, \ldots, \gamma_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ l_1, \ldots, l_s \in \mathbb{N}$（ただし，$a_i$ 達，γ_j 達はそれぞれ互いに相異なり，$k_1, \ldots, k_r, l_1, \ldots, l_s \neq 0$）が一意的に存在して，$\gamma_i = \alpha_i + \sqrt{-1}\beta_i,\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ とすると $k_1 + \cdots + k_r + 2(l_1 + \cdots + l_s) = \deg f$ かつ

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_r)^{k_r} (x - \gamma_1)^{l_1} (x - \overline{\gamma_1})^{l_1} \cdots (x - \gamma_s)^{l_s} (x - \overline{\gamma_s})^{l_s} \\ &= a(x - a_1)^{k_1} \cdots (x - a_r)^{k_r} ((x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{l_1} \cdots ((x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2)^{l_s} \end{aligned}$$

が成り立つ．

2) f, g を 0 ではない実係数の多項式とすると，次が成り立つ．まず 1) のように $f(x) = a(x-a_1)^{k_1} \cdots (x-a_r)^{k_r}((x-\alpha_1)^2+\beta_1^2)^{l_1} \cdots ((x-\alpha_s)^2+\beta_s^2)^{l_s}$ と表す．すると，$\deg g - \deg f$ 次の多項式 h（$h = 0$ も許し，次数は 0 とみなす．また $\deg g < \deg f$ の時には $h = 0$ とする） と $c_{i,j} \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j < k_i,\ d_{i,j}, e_{i,j} \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq l_s$ が一意的に存在して

$$\frac{g(x)}{f(x)} = h(x) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq k_i}} \frac{c_{i,j}}{(x - a_i)^j} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j < l_s}} \frac{d_{i,j}x + e_{i,j}}{((x - a_i)^2 + b_i^2)^j}$$

が成り立つ．多項式 f, g を用いて $\dfrac{g}{f}$ と表される函数を有理函数と呼ぶ．このように $\dfrac{g}{f}$ を表すことを有理函数の**部分分数分解**と呼ぶ．

問 8.5. f を 0 でない実多項式（実数を係数とする多項式）とする．

1) f が奇数次（$\deg f$ が奇数）であれば，$f(x) = 0$ なる $x \in \mathbb{R}$ が存在することを示せ．代数学の基本定理を用いた証明，用いない証明両方について考えてみよ．

2) f が性質「定数でない実多項式 g が f を割り切る（実多項式 h が存在して $f = gh$ が成り立つ）ならば，g は f の定数倍である」を持つとする（このとき f は $\mathbb{R}$ **上既約**であると言う）．このとき，$\deg f \leq 2$ が成り立つことを示せ．

問 8.6. 次に挙げる実多項式の，複素数の範囲での（複素多項式を用いた）因数分解および実数の範囲での因数分解を求めよ．ただし，可能な限り分解すること（既約分解を与えること）．
1) x^4+1　　2) x^5-1　　3) x^6+1
ヒント：例えば x^6+1 の根はどのような複素数であるか考えてみよ．問 8.5 の 2) にも注意せよ．

問 8.7 (解析演習，東大出版会より改題)**.** 次に挙げる函数の部分分数分解と，不定積分を求めよ．
1) $\dfrac{1}{x^2+6x+8}$　　2) $\dfrac{3x+1}{(x-1)^2(x+3)}$　　3) $\dfrac{x}{x^2+2x-3}$

問 8.8 (Darboux の定理)**.** ここでは Darboux の定理

定理. $P=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ とし，$f\colon P\to\mathbb{R}$ とする．また，$S=\sup_{\Delta}\overline{s}(f;\Delta)$，$s=\inf_{\Delta}\underline{s}(f;\Delta)$ をそれぞれ過剰和の下限，不足和の上限とする．ただし，Δ は P の分割全体を走るとする．このとき $\lim_{\delta(\Delta)\to 0}\underline{s}(f;\Delta)=s$，$\lim_{\delta(\Delta)\to 0}\overline{s}(f;\Delta)=S$ がそれぞれ成り立つ．

のうち，$\lim_{\delta(\Delta)\to 0}\underline{s}(f;\Delta)=s$ が成り立つことを示す．$\overline{s}(f;\Delta)$ についても同様である．
（証明及び問）．ある i について $a_i=b_i$ であれば，任意の Δ について $\underline{s}(f;\Delta)=\overline{s}(f;\Delta)=0$ が成り立つので，$s=S=0$ が成り立つ．特に定理の主張も成り立つ．そこで以下では $\forall i,\ a_i<b_i$ とする．$\varepsilon>0$ とする．s の定義から，P のある分割 D が存在して $s-\varepsilon<\underline{s}(f;D)\le s$ が成り立つ．このような $D=(D_i)_{1\le i\le n}$ を一つ選び，固定する．$1\le a\le n$ とする．$D_a=\{x_0,\dots,x_k\}$ と表して $d_a=\min_{0\le j\le k-1}|x_{j+1}-x_j|$ と置き，$\delta=\min_{1\le a\le n}d_a$ と置く．ここで P の分割 $\Delta=(\Delta_i)$ が $\delta(\Delta)<\delta$ をみたすとする．

1) $\Delta_i=\{y_0,\dots,y_l\}$ とすると，Δ_i は P の一辺 $[a_i,b_i]$ の分割であるが，このとき，区間 $[y_j,y_{j+1}]$ に含まれる D_i の分点（上の記号で言えば x_i 達）は高々一つであることを示せ．
2) Δ'_i を，D_i の分点と Δ_i の分点を併せて得られる $[a_i,b_i]$ の分割とし，$\Delta'=(\Delta'_i)_{1\le i\le n}$ と置くと，Δ' は D,Δ の共通細分であることを示せ．

$\underline{s}(f;\Delta)$ と $\underline{s}(f;\Delta')$ のうち，$I\in\mathcal{I}(\Delta)$ にあたる部分の和を考える．まず，$I\in\mathcal{I}(\Delta)$ とし，分割 Δ' については $I=I_1\cup\cdots\cup I_k,\ I_i\in\mathcal{I}(\Delta')$ が成り立つ場合を考える．このとき，$\inf_{x\in I}f(x)=m_0$，$\inf_{x\in I_i}f(x)=m_i$ と置いて $m_0v(I)$ と $\sum_{1\le i\le k}m_iv(I_i)$ を比較する．

3) $\sum_{1\le i\le k}m_iv(I_i)-m_0v(I)\le(M-m)v(I)$ が成り立つことを示せ．

一方，$I\in\mathcal{I}(\Delta)$ が D の分点とは無関係で，分割 Δ' についても $I\in\mathcal{I}(\Delta')$ をみたすのであれば，$\underline{s}(f;\Delta)$ と $\underline{s}(f;\Delta')$ のうち，I にあたる部分の和は等しい．従って，全体としては，分割 Δ' を考えると実際に分割される $I\in\mathcal{I}(\Delta)$ 全体についての $v(I)$ の和を $V(\Delta)$ と置けば $\underline{s}(f;\Delta')-\underline{s}(f;\Delta)\le(M-m)V(\Delta)$ が成り立つ．さて，$I\in\mathcal{I}(\Delta)$ が実際に分割されるとすると，

$I=[z_1,w_1]\times\cdots\times[z_n,w_n]$ と表したときいずれかの $[z_i,w_i]$ は D_i の分点を含む．従って，D_i の分点の数を r_i と置くと，$[a_i,b_i]$ の分割 Δ_i のうち，実際に分割される $I\in\mathcal{I}(\Delta_i)$ の数は高々 r_i 個である（もう少し小さい数で抑えられるが，これで十分である）．一方，$|w_i-z_i|\le\delta(\Delta)$ であるから，$[z_1',w_1']\times\cdots\times[z_i,w_i]\times\cdots\times[z_n',w_n']$ の形をした（i 番目の $[z_i,w_i]$ は指定されている）$I\in\mathcal{I}(\Delta)$ 全体に関する $v(I)$ の和を v とすると $v\le(w_i-z_i)\displaystyle\prod_{j\ne i}(b_j-a_j)\le\delta(\Delta)\prod_{j\ne i}(b_j-a_j)$ が成り立つ．従って，$V(\Delta)$ のうち，第 i 成分が細分されることにより得られる分は，高々 $r_i\delta(\Delta)\displaystyle\prod_{j\ne i}(b_j-a_j)$ である．これを全ての i について考えれば良いから，$V(\Delta)\le\displaystyle\sum_{i=1}^{n}r_i\delta(\Delta)\prod_{j\ne i}(b_j-a_j)$ が成り立つ．そこで $c=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}r_i\prod_{j\ne i}(b_j-a_j)$ と置けば，これは Δ には無関係な非負の定数であって，$\underline{s}(f;\Delta')-\underline{s}(f;\Delta)\le c(M-m)\delta(\Delta)$ が成り立つ．一方，講義で扱ったように $\underline{s}(f;D)\le\underline{s}(f;\Delta')$ が成り立つ．

4) $s-\underline{s}(f;\Delta)=(s-\underline{s}(f;D))+(\underline{s}(f;D)-\underline{s}(f;\Delta'))+(\underline{s}(f;\Delta')-\underline{s}(f;\Delta))$ に注意して，$s-\underline{s}(f;\Delta)<\varepsilon+c(M-m)d(\Delta)$ が成り立つことを示せ．

c,M,m は Δ に無関係であることに注意して，$\delta=\min\left\{d_1,\dots,d_n,\dfrac{\varepsilon}{c(M-m)+1}\right\}$ と置く．

5) $\delta(\Delta)<\delta$ なる分割 Δ について $s-\underline{s}(f;\Delta)<2\varepsilon$ が成り立つことを示せ．更に，$s-2\varepsilon<\underline{s}(f;\Delta)\le s$ が成り立つことを示せ．

（以上）