２０１５年度微分積分学（理 I 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 7　　2015/9/14（月）

'15/9/16：問 7.15 の誤植を修正（$M_{n,1}(\mathbb{R})$ と $M_{1,n}(\mathbb{R})$ が逆であった）.

'15/9/24：問 7.13 を訂正．指摘してくれた学生に感謝する.

定義 7.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし，$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ を函数（写像）とする．f が ***U* 上一様連続**であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (x, y \in U,\ \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon)$$

が成り立つことを言う．U が明らかな場合には単に f が一様連続であると言うことも多い.

問 7.2. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし，$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ とする．$f = (f_1, \ldots, f_m)$ と座標（成分）を用いて表す．このとき，f が U 上一様連続であることと，$f_1, \ldots, f_m$ が U 上一様連続であることは同値であることを示せ.

問 7.3. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし，$f\colon U \to \mathbb{R}$ を函数とする.

1) f が U 上連続であることの定義を，所謂 ϵ–δ 法を用いて述べよ.
2) f が U 上一様連続であるならば，f は U 上連続であることを示せ.

注 7.4. 函数（や写像）が一様連続であることの定義において，函数や写像の定義域も重要であることに注意せよ．例えば，$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ が $K \subset U$ 上一様連続であるが，U 上では一様連続ではない，といったことが起きる（問 7.5, 7.6 にも注意）．これは後で述べるリプシッツ連続（性）についても同様である.

問 7.5 (いくつかの問については問 7.15 も参考にすると良い).
U, f を以下のように定めるとき，f が U 上

i) 一様連続である.
ii) 連続であるが，一様連続ではない.
iii) 連続ではない.

のいずれであるか判定せよ（勿論証明が要る）.

1) $U = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ とし，$x \in U$ について $f(x) = x^2$ とする.
2) $U = \mathbb{R}$ とし，$x \in U$ について $f(x) = x^2$ とする.
3) $U = \mathbb{R}$ とし，$x \in U$ について $f(x) = \sin x$ とする.
4) $U = [1, +\infty)$ とし，$x \in U$ について $f(x) = \log x$ とする.
5) $U = (0, +\infty)$ とし，$x \in U$ について $f(x) = \log x$ とする.
6) $U = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ とし，$(x, y) \in U$ について $f(x, y) = x^2 - y^2$ とする.
7) $U = [0, 1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ とし，$(x, y) \in U$ について $f(x, y) = x^2 - y^2$ とする.
8) $U = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ とし，$(x, y) \in U$ について $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   とする.

問 7.6. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし，函数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ は U 上一様連続とする．$V \subset U$ とすると f の V への制限 $f|_V$ は V 上一様連続であることを示せ.

定義 7.7. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし，$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ を函数とする．f が ***U* 上リプシッツ** (Lipschitz) **連続**であるとは，$L \in \mathbb{R},\ L \geq 0$ が存在して

$$x, y \in U \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq L\,\|x - y\| \tag{7.8}$$

が成り立つことを言う．また，(7.8) が成り立つような L の下限を**リプシッツ定数**と呼ぶ．U が明らかな場合には単に f がリプシッツ連続であると言うことも多い．

リプシッツ連続な函数は，例えば常微分方程式と関連して重要である．リプシッツ定数は f だけではなく U にも依存することに注意せよ．

問 7.9. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし，$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ とする．$f = (f_1, \ldots, f_m)$ と座標（成分）を用いて表す．このとき，f が U 上リプシッツ連続であることと，$f_1, \ldots, f_m$ が U 上リプシッツ連続であることは同値であることを示せ．

問 7.10. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし，$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ は U 上リプシッツ連続であるとする．

1) f は U 上一様連続であることを示せ．
2) L をリプシッツ定数とすると，この L に関して (7.8) が成り立つことを示せ．

問 7.11. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし，$f\colon U \to \mathbb{R}$ はリプシッツ連続とする．また，$V \subset U$ とする．

1) f の V への制限 $f|_V$ は V 上リプシッツ連続であることを示せ．
2) f のリプシッツ定数を L，$f|_V$ のリプシッツ定数を L' とすると $L' \leq L$ が成り立つことを示せ．

問 7.12.

1) $U \subset \mathbb{R}$ とする．また，$f\colon U \to \mathbb{R}$ はリプシッツ連続であって，リプシッツ定数は L であるとする．f が $t \in U$ で微分可能であるならば $|Df(t)| \leq L$ が成り立つことを示せ．
2) $U \subset \mathbb{R}^n$ とする．また，$f\colon U \to \mathbb{R}$ はリプシッツ連続であって，リプシッツ定数は L であるとする．f が $x \in U$ で微分可能[†1] であるならば $v \in \mathbb{R}^n$ について $\|Df(x)v\| \leq L\,\|v\|$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：x における全微分（の行列表示）と偏微分係数の関係を用いることもできるし，微分の定義に戻っても良い．どちらの方針も大事な考え方を含むので，なるべく両方考えてみよ．

リプシッツ連続の条件 (7.8) を見るとリプシッツ連続な函数は微分可能にも思えるが，必ずしもそうではない．実際，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = |x|$ により定めると，f はリプシッツ連続であるが，$x = 0$ で微分不可能である．一方，大雑把に言えば「リプシッツ連続な函数は，定義域の大概の場所で微分可能である」（Rademacher の定理）ことが知られている．

[†1] 断らずに「微分可能」とある場合には，通常は「全微分可能」を意味する．例外はあるが，これらの理解を前提とした上で専門的に数学を用いる場合にしか現れないと考えて良い．

問 7.13. U, f を以下のように定めるとき，f が U 上

i) リプシッツ連続である．

ii) 一様連続であるが，リプシッツ連続ではない．

iii) 一様連続でない．従ってリプシッツ連続でもない．

のいずれであるか判定せよ．また，リプシッツ連続である場合には条件 (7.8) を満たす L を一つ求めよ[†2]．

1) $r \geq 0,\ U = [0, r]$ とし，$x \in U$ について $f(x) = e^x$ とする．
2) $U = \mathbb{R}$ とし，$x \in U$ について $f(x) = e^x$ とする．
3) $U = \mathbb{R}$ とし，$x \in U$ について $f(x) = \cos x$ とする．
4) $U = \mathbb{R}^2$ とし，$(x, y) \in U$ について $f(x) = e^{-(x^2+y^2)}$ とする．

   ※ この函数はガウス（Gauß）分布（正規分布）と関連し，重要である．二変数で考えるのが難しければ，まず e^{-x^2} について考えてみよ．
5) $U = [-1, 1]$ とし，$f\colon U \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ により定める．

問 7.14. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^1 級の函数とする．$x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ とすると

$$f(y) - f(x) = \int_x^y Df(t)dt$$

が成り立つ（このことは後日示す）．これを踏まえて，次の主張を示せ．

主張． $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^1 級の函数とする．また，$x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y$ とする．$L = \sup\limits_{t \in [x,y]} |Df(t)|$ と置くと，L は有限の値であって，また，$u, v \in [x, y]$ について

$$|f(u) - f(v)| \leq L\,|u - v|$$

が成り立つ．また，L はリプシッツ定数である．

問 7.15. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を C^1 級の函数とする．

1) $x, y \in \mathbb{R}^n$ とする．$l\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ を，$t \in [0, 1]$ について $l(t) = (1 - t)x + ty$ により定める．$g(t) = f \circ l(t)$ とすると g は C^1 級であって，$g(0) = f(x),\ g(1) = f(y)$ が成り立つことを示せ．
2) 1) の g について $\dfrac{dg}{dt}(t)$ を f, l の微分を用いて表せ．
3) $x, y \in \mathbb{R}^n$ とする．f の $z \in \mathbb{R}^n$ における全微分を $M_{1,n}(\mathbb{R})$ の元（行ベクトル）として表す．$M_{1,n}(\mathbb{R})$ の元についても，$\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$ の元と同様にノルム（長さ）を定めると，

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(\sup_{t \in [0,1]} \|Df(l(t))\|\right) \|x - y\|$$

   が成り立つことを示せ．

[†2] 余裕があればリプシッツ定数を求めてみるのも良い練習であるが，一般にはリプシッツ定数を具体的に決定するのは困難である．

4) $K \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合（$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合[†3]）とすると，f は K 上リプシッツ連続であることを示せ．

5) $\mathbb{R}^n$ の開集合 U と，C^1 級の函数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ であって，f は U 上リプシッツ連続でないような例を一つ挙げよ．

問 7.16 (多分それなりに面倒くさい)．リーマン積分の定義に基づいて $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ を求めよ．

問 7.16 にある積分は通常は $[-\cos x]_0^{\pi} = 2$ として求める．ここで，$-\cos x$ の微分（正確には導函数）が $\sin x$ であることを用いているが，リーマン積分の定義に鑑みると，積分がこのようにして求まることは全く自明ではない．このような計算を正当化するのが，微分積分学の基本定理である[†4]．

問 7.17. $P \subset \mathbb{R}^n$ を閉区間の直積，$f\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とする．$c \in \mathbb{R}^n$ とし，$P_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in P,\ x = y + c\}$ と置き，$f_c\colon P_c \to \mathbb{R}$ を $f_c(x) = f(x - c)$ により定めると P_c も閉区間の直積であって，f_c は P_c 上可積分であることを示せ．

問 7.18. $P \subset \mathbb{R}^n$ を閉区間の直積，$f, g\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とする．$fg(x) = f(x)g(x)$ により $fg\colon P \to \mathbb{R}$ を定める．

1) $v(P) = 0$ とすると fg は P 上可積分であること示せ．

2) $v(P) \neq 0$ とする．この時 f, g は有界であるから，ある $C \in \mathbb{R}$ が存在して P 上 $|f| \leq C, |g| \leq C$ が成り立つ．このことを用いて，

$$|fg(x) - fg(y)| \leq C(|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|)$$

が成り立つことを示せ．

3) fg は P 上可積分であること示せ．

問 7.19. 1) $U \subset \mathbb{R}^n,\ V \subset \mathbb{R}^m$ とする．また，$f\colon U \to V$，$g\colon V \to \mathbb{R}^l$ とする．f が U 上，g が V 上リプシッツ連続であって，リプシッツ定数がそれぞれ L, L' であるならば $g \circ f$ もリプシッツ連続であって，リプシッツ定数は LL' 以下であることを示せ．また，$g \circ f$ のリプシッツ定数が LL' より真に小さくなる例を一つ挙げよ．

ヒント：例えば $n = m = l$ として，線型同型写像について考えてみよ．

2) $U \subset \mathbb{R}^n,\ V \subset \mathbb{R}^m$ とする．また，$f\colon U \to V$，$g\colon V \to \mathbb{R}^l$ とする．f, g がそれぞれ U 上，V 上で一様連続であるならば $g \circ f$ は U 上一様連続であることを示せ．

（以上）

[†3] ある集合（空間）X の部分集合がコンパクト集合であることと有界閉集合であることが同値であるためには，空間 X に一定の条件が要る．$\mathbb{R}^n$ は「一定の条件」を満たし，これらの二条件が同値となる（(講義では証明しなかった）ハイネーボレルの定理）．

[†4] 高校まではこの辺の問題を積分の定義を，微分積分学の基本定理を用いて行うことにより回避している．積分は（リーマン積分に限らず）足し算であって，微分は微小変化（率）を求めるものである．これらには明示的な繋がりはなく，その意味で互いの逆操作である理由は全くない．微分積分学の基本定理は極めて重要で，非自明な定理である．定理は当たり前に見えるかも知れないが，例えば迂闊に一般化しようとするとすぐこける．うまくこけると，Stokes の定理（微分積分学の基本定理や，Gaußの発散定理などの一般化）が得られる．これは極めて重要な定理である．