２０１５年度微分積分学（理 I 32〜35 組向け，足助担当）　演習問題 6　　2015/7/17（金）

以下では $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ について $B_x(r) = \{x' \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x') < r\}$ と置く．

問 6.1. f, K を以下のように定めるとき，$f|_K$（f そのものではない）の K における最大点・最小点・極大点・極小点・臨界点を求めよ．存在しないこともあり得るので注意せよ．なお，極大点・極小点は通常の（広義の極大点・極小点ではない）ものとする．

1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^3 - x$ により定める．
   a) $K = [-2, 2] \subset \mathbb{R}$ とする．
   b) $K = \left[-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$ とする．
2) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f(x_1, \ldots, x_n) = {x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2$ とする．
   a) $R \geq 0$ とし，$K = \overline{B_o(R)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(o, x) \leq R\}$ とする．
   b) $K = \mathbb{R}^n$ とする．
3) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x_1, x_2) = {x_1}^2 - {x_2}^2$ により定める．
   a) $R > 0$ とし，$K_R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq |x_2| \leq R\}$ と置く．
   b) $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq |x_2|\}$ と置く．
4) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x, y) = (x^2 + 2x + y^2)(x^2 - 2x + y^2)$ により定める．
   a) $K = B_{(1,0)}(1)$ とする．
   b) $K = B_{(0,0)}(2)$ とする．
   c) $K = B_{(1,0)}(1) \cup B_{(-1,0)}(1)$ とする．
   d) $K = B_{(0,0)}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ とする．
   e) $K = B_{(0,0)}(4)$ とする．

問 6.2. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ を $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ により定める．

1) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x, y) = x^2 + y^2$ により定める．原点 $(0, 0)$ は f の極小点であることを確かめよ．また，$(x, y) \in S^1$ とし，(x, y) における f の勾配ベクトル $\mathrm{grad}_{(x,y)} f$ を図示せよ．
2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x, y) = x^2 - y^2$ により定める．原点 $(0, 0)$ は f の臨界点であるが，鞍点であることを確かめよ．また，$(x, y) \in S^1$ とし，(x, y) における f の勾配ベクトル $\mathrm{grad}_{(x,y)} f$ を図示せよ．
3) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x, y) = -x^2 - y^2$ により定める．原点 $(0, 0)$ は f の極大点であることを確かめよ．また，$(x, y) \in S^1$ とし，(x, y) における f の勾配ベクトル $\mathrm{grad}_{(x,y)} f$ を図示せよ．

問 6.3* (詳しいことは解析学基礎で扱う)．$X = Y = \mathbb{R}^n$ とし，$f\colon X \to Y$ を連続とする（定義域と値域を明確にするために X, Y を用いている）．

1) $U \subset Y(=\mathbb{R}^n)$ を開集合とする．$x \in f^{-1}(U)$ とする．$f^{-1}(U)$ の定義により $f(x) \in U$ であるから，$\epsilon > 0$ を $B_{f(x)}(\epsilon) \subset U$ であるように定める．一方，f は連続であるから $\delta > 0$ を $\forall x' \in \mathbb{R}^n \;\; d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \epsilon$ が成り立つように選ぶ．このとき $B_x(\delta) \subset f^{-1}(U)$ が成り立つことを示せ．従って $f^{-1}(U)$ は $X(=\mathbb{R}^n)$ の開集合である．

2) $A \subset X$ とし，$B = f(A) \subset Y$ と置く．$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $f(A)$ の開被覆である，即ち $B \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ が成り立つならば，$\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は A の開被覆であることを示せ.

3) $K \subset X$ をコンパクトとする．$f(K) \subset Y$ はコンパクトであることを示せ.

問 6.4. 1) 連続写像（函数）$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，$f(\mathbb{R})$ が $\mathbb{R}$ の閉区間とならないような例を挙げよ.

※ $\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の閉部分集合であるから（$\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \varnothing$ は開集合である），主張「$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続とする．F を $\mathbb{R}$ の閉部分集合とすると，F の像 $f(F)$ は閉集合である」は一般には成り立たない.

2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とする．$K \subset \mathbb{R}$ を有界閉集合とすると，$f(K)$ は有界閉集合であることを示せ.

ヒント：$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合はコンパクトであって，逆も正しいことを用いるとよい.

※ 1), 2) は $\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^n$ に置き換えても同様のことが成り立つ.

問 6.5. 1) $f(x_1, \ldots, x_n) = e^{x_1+\cdots+x_n}$ とする．f の原点におけるテーラー展開を，n 変数函数として計算せよ．また，$f(x_1, \ldots, x_n) = e^{x_1} \cdots e^{x_n}$ が成り立つことを用いて，一変数函数のテーラー展開の積として計算せよ．最後に，$g(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$ とすると $f(x_1, \ldots, x_n) = e^{g(x_1,\ldots,x_n)}$ であることを用いて，合成函数のテーラー展開（の公式）を用いて計算せよ.

問 6.6. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^ω 級とすると，変数に複素数を無理矢理「代入」することができる.

1) $f(x) = e^x$ とする．f は $\mathbb{R}$ の任意の点においてテーラー（級数）展開可能であることを，実際にテーラー展開を求めることにより示せ．また，収束半径は $+\infty$ であることを示せ.

2) $\cos x,\ \sin x$ はテーラー（級数）展開可能であること，実際にテーラー展開を求めることにより示せ．また，収束半径は $+\infty$ であることを示せ.

3) 特に原点を中心とした展開を考える．$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ である．x は本来は実数であるが，複素数と考えて $z = x + \sqrt{-1}y$，ただし $x, y \in \mathbb{R}$，とすると

$$e^z = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)$$

が成り立つことを示せ．ここでは，和の順序の交換は自由に行えることと，級数が（適切に）収束することは認め，形式的な計算をすれば良い.

（以上）