２０１５年度微分積分学（理 I 32〜35 組向け，足助担当） 演習問題 3　　2015/6/22（月）

問 3.1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を狭義単調増加な連続函数とする．

1) $a < b \in \mathbb{R}$ とする．$c = f(a)$, $d = f(b)$ とし，f の $[a, b]$ への制限 $f|_{[a,b]}$ を $f_{a,b}$ で表すことにする．$f_{a,b}$ は $[a, b]$ から $[c, d]$ への全単射であることを示せ．
2) 1) において $f_{a,b}$ の逆写像が存在し，それを g とすると $g\colon [c, d] \to [a, b]$ は連続であることを示せ．
3) さらに f は $\mathbb{R}$ 上微分可能とする．このとき，2) における g は $[c, d]$ 上微分可能であって，$y \in [c, d]$ について
$$Dg(y) = \frac{1}{Df(g(y))}$$
が成り立つことを示せ．
4) さらに f が C^r 級（$r \geq 1$）とすると 2) における g も C^r 級であることを示せ．
5) $I = f(\mathbb{R})$ とすると，連続写像 $g\colon I \to \mathbb{R}$ が存在し，$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, $f \circ g = \mathrm{id}_I$ が成り立つことを示せ．また，$I = \mathbb{R}$ となる例，ならない例を一つずつ挙げよ．

ヒント：1) について．中間値の定理（あるいはそれと同値な条件，つまり何らかの形での実数の連続性）が要る．
3) について．直感的には以下のようにすれば分かる．$y = f(x)$ とする．$|h|$ が小さいとき，$g(y+h) = x + k$ とすれば $y + h = f(x + k)$ なので
$$\frac{g(y+h) - g(y)}{h} = \frac{x + k - x}{f(x+k) - f(x)} = \frac{k}{f(x+k) - f(x)}$$
が成り立つ．$h \to 0$ と $k \to 0$ は同値なので $k \to 0$ として主張を得る．これを厳密に書き切ればよい．3) が分かってしまえば 4) は易しい．
5) にいついて．例えば $J_n = [-n, n]$ として f の J_n への制限を考えてみよ．

問 3.2. $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級とする．$D^r(g \circ f)$ を $r = 1, 2, 3$ について求めよ．

問 3.3. 次に挙げる函数の，与えられた点を中心とするテーラー展開を求めよ．また，a_n を n 次の項の係数とするとき，$\displaystyle\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ を求めよ（この値の逆数（ただし，$\dfrac{1}{+\infty} = 0$, $\dfrac{1}{0} = +\infty$ と考える）はテーラー展開（級数）の**収束半径**と呼ばれる）．

1) $f(x) = \sin x^2$ とし，中心は 0 とする．
2) $f(x) = \sin x$ とし，中心は $\dfrac{\pi}{2}$ とする．
3) $f(x) = x - x^2$ とし，中心は 1 とする．
4) $f(x) = \log(1 + x^2 + x^3)$ とし，中心は 0 とする．

5) $f(x,y)=\sin(x+y)$ とし，中心は $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ とする．

6) $f(x,y)=e^x\cos y$ とし，中心は $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ とする．

7) $f(x,y)=e^{x+x^2}$ とし，中心は 0 とする．

8) $f(x,y)=\dfrac{1}{1+x}$ とし，中心は 0 とする．

9) $f(x)=\tan^{-1}x$ とする．ただし，$f(0)=0$ であるとする．また，中心は 0 とする．

問 3.4. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ により定める．

1) f の $x=0$ におけるテーラー展開を求め，Lagrange の剰余項と，剰余項の積分表示をそれぞれ求めよ．

2) f は $x=0$ においてテーラー（級数）展開可能であることを示せ．また，f の $x=0$ におけるテーラー級数の収束半径を求めよ．

3) $a\in\mathbb{R}$ とすると f は $x=a$ においてテーラー展開可能であることを示せ．また，テーラー級数の収束半径を求めよ．

ヒント：2) において収束半径は有限の（正の）値である．従って，f は $\mathbb{R}$ 上定義されているが，$x=0$ におけるテーラー展開は有限の範囲でしか有効でない．

問 3.5. 講義で扱った，合成函数のテーラー展開に関する命題を参考に，C^r 級函数 $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に関する

1) 和 $f+g$ のテーラー展開の係数,

2) 積 fg のテーラー展開の係数,

3) $f(0)\neq 0$ とした場合の，$x=0$ における $\dfrac{1}{f}$ のテーラー展開の係数

についてそれぞれ調べよ．

問 3.6. $f(x)=\cos x$，$g(x)=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ とする．

1) $(0,f(0))=(0,1)$ を通る直線を $y=f_1(x)=ax+1$ により定める．$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f_1(x)}{x^k}$ が存在するような k が最も大きくなるように a を定めよ．また，その時の k を求めよ．

2) $(0,1)$ を通る放物線を $y=f_2(x)=ax^2+bx+1$ により定める．$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f_2(x)}{x^k}$ が存在するような k が最も大きくなるように a,b を定めよ．また，その時の k を求めよ．

3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-g(x)}{x^k}$ が存在するような最大の k を求めよ．

4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{g(x)-(ax^2+bx+c)}{x^k}$ が存在するような k が最も大きくなるように a,b,c を定めよ．また，その時の k を求めよ．

（以上）