２０１５年度微分積分学（理 I 32〜35 組向け，足助担当） 演習問題 2　2015/6/15（月）
'15/6/17：表題と，全体的に番号を修正．曲線が接することの定義を追加（2 ページ）．

問 2.1. $f, g \colon \mathbb{R} \to M_3(\mathbb{R})$ を

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

により定める．実際には f, g は 3 次の直交群（直交行列全体のなす群．O_3 などと表される）に値をとる写像である．

1) ${}^t f(t) f(t) = I_3$, ${}^t g(t) g(t) = I_3$ が成り立つことを示せ．ここで I_3 は 3 次の単位行列を表す．また $A \in M_3(\mathbb{R})$ について ${}^t A$ で A の転置行列を表す．
2) $Df(t) = \dfrac{df}{dt}(t)$ を求めよ．また，$Df(0) + {}^t Df(0) = O_3$ が成り立つことを示せ．
3) $D(fg^{-1})(t)$ を求めよ．
4) $D(fgf^{-1}g^{-1})(t)$ を求めよ．また，$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，$[A, B] = AB - BA$ を求めよ．
5) A, B を上のように定めると $f(t) = \exp tA$, $g(t) = \exp tB$ がそれぞれ成り立つことを示せ．また，$h(t) = \exp t[A, B]$ とするとき，$D(fgf^{-1}g^{-1}h^{-1})(0)$ を求めよ．
exp に関してはこのプリントの後半などを参照のこと．

問 2.2. C を $\mathbb{R}^2$ 内の，原点を中心とする半径 1 の円とする．

1) $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ で条件
   a) f は C^∞ 級である．
   b) $f^{-1}(0) = C$.
   c) $\forall p \in C$, $\operatorname{rank} Df(p) = 1$.

   を満たすものを一つ求めよ．
2) $l \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ で条件
   a) l は C^∞ 級である．
   b) $l(\mathbb{R}) = C$.
   c) $\forall t \in \mathbb{R}$, $Dl(t) \neq o$（o は零ベクトル）．

   を満たすものを一つ求めよ．

定義. $l\colon I \to \mathbb{R}^2, l'\colon I' \to \mathbb{R}^2$ を微分可能な曲線とする.

a) $l(t_0) = l'(t'_0) = p \in \mathbb{R}^2$ が成り立つ.

b) $Dl(t_0), Dl'(t'_0)$ は共に o（零ベクトル）でなく，平行である.

が成り立つとき，l と l' は **p において接する**（$t = t_0,\ t' = t'_0$ において，などと t_0, t'_0 を明示することも多い）と言う.

定義. $D \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とし，$f, g\colon D \to \mathbb{R}$ を C^1 級とする．また，D 上で $\operatorname{rank} Df = \operatorname{rank} Dg = 1$ が成り立つとする．f, g が定める曲線 $I_f = \{q \in D \mid f(q) = 0\}$ と $I_g = \{q \in D \mid g(q) = 0\}$ が **$p \in D$ において接する**とは,

a) $p \in I_f \cap I_g$，即ち，$f(p) = g(p) = 0$ が成り立つ.

b) $Df(p)$ と $Dg(p)$ は平行である（これらは仮定により零ベクトルでないことに注意）.

が成り立つことを言う.

問 2.3. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を $\mathbb{R}^2$ の標準的な内積とする．また，l を $\mathbb{R}$ 上定義された C^∞ 級の正則な曲線とする.

1) $f(t) = \|Dl(t)\|$ と置く．$Df(t)$ を $Dl(t)$ と $D^2l(t)$，$\langle \cdot | \cdot \rangle$ を用いて表せ.

以下では $\forall t \in \mathbb{R},\ \|Dl(t)\| = 1$ が成り立つ，つまり l は弧長をパラメータとすると仮定する.

2) $D^2l(t)$ は $Dl(t)$ と直交する，即ち $\langle D^2l(t) \,|\, Dl(t) \rangle = 0$ が成り立つことを示せ.

3) $D^2l(t) \neq 0$ とし，$r = \dfrac{1}{\|D^2l(t)\|}$ と置く．$p = l(t),\ q = p + r\dfrac{D^2l(t)}{\|D^2l(t)\|}$ とすると，q を中心とする半径 r の円は p において l（で表される曲線）と接することを示せ．q を l の p における**曲率中心**，r を l の p における**曲率半径**と呼ぶ．また，q を中心とする半径 r の円を p における l の**曲率円**と呼ぶ．$\det(Dl(t)\ D^2l(t))$ が正の値であれば $\left\|D^2l(t)\right\|$ を，負の値であれば $-\left\|D^2l(t)\right\|$ を l の p における**曲率**と呼ぶ.

4) $r > 0$ とし，$l(t) = \begin{pmatrix} r\cos\frac{t}{r} \\ r\sin\frac{t}{r} \end{pmatrix}$ とする．l の $l(t)$ における曲率中心，曲率，曲率半径及び曲率円を求めよ.

5) $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は必ずしも弧長をパラメータとしないとする．このとき，曲率中心，曲率半径を l を用いて表せ.

問 2.4. f を次のように定めるとき，Df と $\det Df$ を求めよ．特に，$\det Df \neq 0$ であるための条件も求めよ．また，f が像への全単射であるような定義域を，なるべく大きくなるように一つ定めよ.

1) $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$ とし，$f(r,\theta)=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ とする．

2) $(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3$ とし，$f(r,\theta,\varphi)=\begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ とする．

3) $(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3$ とし，$f(x,y,\theta)=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$ とする．

4) $f\colon\mathbb{R}^2\to S^2=\{{}^t(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2=1\}$ を，$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ について $f(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{2x}{1+x^2+y^2} \\ \dfrac{2y}{1+x^2+y^2} \\ \dfrac{1-(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} \end{pmatrix}$ と置くことにより定める．この f については $\det Df$ は（定義されないので）求めなくてよい．一方，S^2 の点で f の像に属さない点を（全て）求めよ．

陰函数定理・逆函数定理は重要であるが,「微分積分学続論」で扱うのでここでは線型写像の場合に限って陰函数定理について扱う．

問 2.5 (陰函数定理（線型写像の場合）)．$A\in M_{m,m+n}(\mathbb{R})$ とし，$A=(A_1\ A_2)$ と，$A_2\in M_m(\mathbb{R})$ となるように区分けする（従って $A_1\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ である）．また，$f\colon\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^m$ を $f(p)=Ap$ により定める．$p\in\mathbb{R}^{m+n}$ について

a) $f(p)=o$（o は零ベクトル），

b) $A_2\in\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$

がそれぞれ成り立つとする．

1) $Df(p)=A$ が成り立つことを示せ．特に $Df(p)=(Df_1(p)\ Df_2(p))$ と，$Df_2(p)\in M_m(\mathbb{R})$ となるように区分けすると $Df_1(p)=A_1$，$Df_2(p)=A_2$ がそれぞれ成り立つ．特に仮定 b) は
$$Df_2(p)\in\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$$
となる．これが本来の仮定である．

2) $V=\{p\in\mathbb{R}^{n+m}\,|\,f(p)=o\}$ と置く．$B\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ が一意的に存在して，$g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を $g(v)=Bv$ により定めると

a) $\begin{pmatrix} v \\ g(v) \end{pmatrix}\in V$,

b) $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in V$ ならば $w = g(v)$,

が成り立つことを示せ．

※ V は g のグラフであることを主張していることに注意せよ．

3) $C = \begin{pmatrix} E_n & O_{n,m} \\ B & {A_2}^{-1} \end{pmatrix}$，$E_n$ は単位行列，B は 2) のもの，とし，$F\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ を $F(u) = Cu$ により定めると，F は線型同型写像であって，$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ について $f \circ F \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_2$ が成り立つことを示せ．

全般的なヒント：線型写像と行列（表現行列），特に線型同型写像と正則行列の関係について調べよ．

以下では行列の指数函数について述べる．テーラー展開について学んでからもう一度読み返すと良い．また，線型代数学でも同様の内容を扱うかもしれない．

定義 2.6. $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．$M_n(\mathbb{R})$ に値をとる級数（無限和）$\exp A$ を

$$\begin{aligned} \exp A &= E_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} A^m \end{aligned} \tag{2.6–1}$$

により定める．ここで，$A \in M_n(\mathbb{R})$ について $A^0 = E_n$ と定める．$A \in M_n(\mathbb{C})$ であっても同じ式で $\exp A$ を定める．

以下では主に $M_n(\mathbb{C})$ の元を扱うが，慣れないうちは $M_n(\mathbb{R})$ についての話だと考えていれば良い．

問 2.7***.** 成分の並べ方をあらかじめ指定することにより $M_n(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}^{n^2}$ と同一視する．$K \subset M_n(\mathbb{C}^2)$ を有界閉集合とすると，$\exp A$ の各成分は $A \in K$ について一様に絶対収束することを示せ．

※ 数学を専門的に用いる予定が全くないのであれば放置して構わない．

以下では $\exp A$ の成分は大変都合良く収束することを認める．例えば $\exp A$（の成分は）定義の式があたかも多項式であるかのように,「普通に」計算すれば良い．

問 2.8. 1) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ を対角行列とする．この時

$$\exp A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

2) $\exp\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\exp\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$，ただし $\mu \in \mathbb{R}$，$\exp\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$，ただし $a, b, c \in \mathbb{R}$ をそれぞれ求めよ.

問 2.9. $A_1 \in M_m(\mathbb{C})$, $A_2 \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$A = A_1 \oplus A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & O_{m,n} \\ O_{n,m} & A_2 \end{pmatrix}$ と置けば $\exp A = (\exp A_1) \oplus (\exp A_2)$ が成り立つことを示せ.

ここまでは都合の良い話ばかりであるが,（いつものように）そうとばかりも言っていられない.

問 2.10. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ とする.

1) $AB = BA$ ならば $\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B) = (\exp B)(\exp A)$ が成り立つことを示せ.

2) $\exp(A+B)$, $(\exp A)(\exp B)$, $(\exp B)(\exp A)$ のうち，どの二つも一致しないような $A.B \in M_2(\mathbb{R})$ の例を一組挙げよ.

定義 2.11. $N_n = \begin{cases} (0), & n = 1, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} & \end{cases}$ と置く．また，$\lambda \in \mathbb{C}$ について $J_n(\lambda) = \lambda E_n + N_n$ と置いて，λ に属する n 次の **Jordan block** と呼ぶ.

問 2.12. $\exp J_n(\lambda)$ を求めよ.

問 2.13. $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．$\exp A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ であって，$(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ が成り立つことを示せ．また，$A \in M_n(\mathbb{C})$ としても同様のことが成り立つことを示せ.

定義式 (2.6–1) の収束は大変都合が良いので，次が成り立つ．

定理 2.14. $B \in M_n(\mathbb{C})$ とする．このとき，$A(t) = Bt$ とすると

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\exp A\right)(t) &= B + B^2 t + \frac{1}{2!}B^3 t^2 + \cdots \\ &= B(\exp A(t)) \\ &= (\exp A(t))B\end{aligned}$$

が成り立つ．
※ うるさいことを言えば，$(\exp A)(t)$（$\exp A$ の t での値）は $\exp(A(t))$（$A(t)$ の exp）であると定めている．

問 2.15. 形式的な，収束を気にしない計算をしてよいことを認めた上で定理 2.14 を示せ．

定理 2.14 は A が良い形をしているから成り立つ．

問 2.16. C^∞ 級の函数 $A\colon \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ であって，$\dfrac{d}{dt}\exp A$，$\dfrac{dA}{dt}(\exp A)$，$(\exp A)\dfrac{dA}{dt}$ のうち，どの二つも一致しないようなものを一つ挙げよ．

問 2.17. $\mathbb{R}^n$ 値函数 f に関する定数係数常微分方程式

(2.17–1)
$$\frac{df}{dt} = Af + b,$$

$A \in M_n(\mathbb{R})$, $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ は連続，について考える．

1) $b = 0$ とする．$v \in \mathbb{R}^n$，$f(t) = \exp(At)v$ とすると f は (2.17–1) の解であることを示せ．
2) 一般の b について考える．
   2–1) f が (2.17–1) の解であるとする．$X(t) = \exp(-At)f$ としたとき，X の満たす微分方程式（で自然なもの）を求めよ．
   2–2) $Y(t) = \displaystyle\int (\exp(-At)b(t)dt$ と置く．(2.17–1) の解（一般解）を Y などを用いて表せ．
3) $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とし，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ について $g = C^{-1}f$ と定める．f が (2.17–1) の解であることと，g が
$$\frac{dg}{dt} = C^{-1}ACg + C^{-1}b$$
の解であることは同値であることを示せ．

ここまでくると，定数係数の常微分方程式（常微分方程式系）については完全に解けるが，線型代数に関する準備がもう少しいるのでここではここまでにする．具体的には，例えば問 2.17 において f の値域を $\mathbb{C}^n$ としてよいのであれば，$A \in M_n(\mathbb{C})$ について $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在して $P^{-1}AP$ が Jordan 標準形となることを用いればよい．全てを実数の範囲で済まそうと思うと，回転のような状況が生じ,「実 Jordan 標準形」が必要となる．Jordan 標準形や実 Jordan 標準形は取り立てて難しいわけではないが，一定の準備は要る．

問 2.18. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ に関する微分方程式

$$\frac{df}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f,\ f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を，今知っている方法それぞれを用いて解け．特に，f の値域を複素数の範囲にまで（無理矢理）広げて解いた場合どのようになるか考えてみよ．

※ f の値域に加え，t も複素数としてみるのも良いが，少し難しくなる．

（以上）