

'16/2/12: 脚注 27 を修正.

'16/4/29: 問 11.2.1 の 5) を修正. 脚注 21 中の問題番号を修正.

行列の「標準形」には様々なものがあり, それぞれに長所・短所がある. ここでは Jordan 標準形・実 Jordan 標準形と有理標準形 (Frobenius 標準形) について考察する. 以下ではいくつか脚注を用いるが, † は一般的な注意, †† はやや難しい注意を表す.

### 11.1. 一般的な準備.

$A \in M_n(K)$  について, 標準形を定める際に重要なものの一つは,  $K^n$  の  $A$ -不変な部分線型空間で都合の良いものを如何に取るか, ということである. 例えば  $A$  が対角化可能であると仮定して対角化について言えば,  $A$  の固有値に属する固有空間達を考えると話がうまくいった. Jordan 標準形や有理標準形は必ずしも  $A$  が対角化可能でない場合を念頭に置いているので, 全く同様とはいかないが, それなりに平行に話を進めることができる. 対角化の際には固有多項式が重要であったが, ここでも固有多項式やその類似物 (最小多項式, 最小消去多項式) が重要である. これらの多項式を有効に扱うために少し用意が要る. やや難しいことも含まれるので, 取り敢えず次節「Jordan 標準形」に進み, 必要に応じて参照しても良い. また, さらに進んだことについて学びたい場合には, 例えば単因子論や有限生成 Abel 群 (可換群) の基本定理について調べると良い.

以下では  $K$  を  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$  のいずれか<sup>†2</sup>とする.

記号 11.1.1.  $A \in M_n(K)$  について  $A^0 = E_n$  と定める. また,  $K$ -線型空間  $V$  の  $K$ -線型変換  $\varphi$  について  $\varphi^n = \overbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}^{n \text{ 個}}, \varphi^0 = \text{id}$  と定める. また,  $\varphi$  が正則であるとき (線型同型であるような線型変換であるとき),  $n \in \mathbb{N}$  について  $\varphi^{-n} = (\varphi^n)^{-1}$  と定める.

定義 11.1.2.  $f \in K[x], A \in M_n(K)$  とする.  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_r x^r$  である時,

$$f(A) = a_0 E_n + a_1 A + \cdots + a_r A^r$$

と置き,  $A$  を  $x$  に代入して得られる行列などと呼ぶ. また,  $\varphi$  を  $K$ -線型空間  $V$  の線型変換とするとき,  $V$  の線型変換  $f(\varphi)$  を

$$f(\varphi) = a_0 \text{id}_{K^n} + a_1 \varphi + \cdots + a_r \varphi^r$$

により定める.  $f(\varphi)$  は  $\varphi$  を  $x$  に代入して得られる線型変換である.

<sup>†1</sup>この資料の内容は講義の範囲 (試験の出題範囲) から外れる部分も少なくないが, 線型代数を理論的・实际的に用いようとするときしばしば必要となることである. なお, 理屈・技法に関しては講義で扱ったことと, 高校までで扱われている以上のことは用いていない. また, 少なくとも Jordan 標準形については数理科学 IV で扱われるので, 理学部や工学部に進学するのであれば履修することを勧める.

<sup>†2</sup> $K$  は一般に (可換) 体であればよい.

問 11.1.3.  $f \in K[x]$  とする .  $A \in M_n(K)$ ,  $P \in GL_n(K)$  とすると  $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$  が成り立つことを示せ . また ,  $\varphi, \psi$  を  $V$  の線型変換とし ,  $\psi$  は正則であるとする .  $f(\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi) = \psi^{-1} \circ f(\varphi) \circ \psi$  が成り立つことを示せ .

問 11.1.4.  $f$  を  $V$  の線型変換とする .  $\mathcal{V}$  を  $V$  の順序付き基底 ,  $A$  を  $\mathcal{V}$  に関する  $\varphi$  の表現行列とすると  $f(\varphi)$  の  $\mathcal{V}$  に関する表現行列は  $f(A)$  であることを示せ .

問 11.1.5.  $f, g \in K[x]$ ,  $\lambda, \mu \in K$ ,  $A \in M_n(K)$  とする .  $(\lambda f + \mu g)(A) = \lambda f(A) + \mu g(A)$ ,  $(f \cdot g)(A) = f(A)g(A)$  がそれぞれ成り立つことを示せ . また ,  $\varphi$  を  $V$  の線型変換とすると  $f(\varphi) \circ g(\varphi) = (f \cdot g)(\varphi)$  が成り立つことを示せ . ただし , ここでは多項式の積  $fg$  を , 合成との混乱を防ぐために  $f \cdot g$  で表した .

定義 11.1.6. 1)  $A \in M_n(K)$  とする .  $f \in K[x]$  であって , 条件

a)  $f(A) = O_n$  かつ  $f$  の最高次の項の係数は 1 に等しい<sup>†3</sup> .

b)  $f$  は 1) を満たすもののうち , 次数が最低である .

を満たすものを  $A$  の最小多項式と呼ぶ .

2)  $\varphi$  を  $V$  の  $K$ -線型変換とする .  $f \in K[x]$  であって , 条件

a)  $f(\varphi) = 0$  ( 零写像 ) かつ  $f$  の最高次の項の係数は 1 に等しい .

b)  $f$  は 1) を満たすもののうち , 次数が最低である .

を満たすものを  $f$  の最小多項式と呼ぶ .

$A \in M_n(K)$  とする . 最小多項式かどうかは別として ,  $f(A) = O_n$  が成り立つような , 0 でない  $K[x]$  の元  $f$  は必ず存在する .

定理 11.1.7 (Cayley-Hamilton の定理).  $A \in M_n(K)$  とする .  $f$  を  $A$  の固有多項式とすると  $f(A) = O_n$  が成り立つ .

また , もっと大雑把に次のように考えてもよい .

問 11.1.8.  $A \in M_n(K)$  とする .  $E_n, A, \dots, A^{n^2} \in M_n(K)$  は線型従属であることを示せ . また ,  $g \in K[x]$  であって , 最高次の項の係数は 1 で , かつ  $g(A) = O_n$  を満たすものが存在することを (Cayley-Hamilton の定理を用いずに) 示せ .

いずれにせよ , 最高次の項の係数が 1 であるような  $K[x]$  の元  $f$  で  $f(A) = O_n$  なるものが存在する . 従って最小多項式は必ず存在する . これが一意かどうかは確かめないとはいけない .

先に進む前に , 多項式について基本的な用語を定義しておく . いくつかはここまでも直感的に (定義なしに) 用いていた .

<sup>†3</sup>最高次の項の係数が 1 であるような多項式をモニック (monic) であると言う .

定義 11.1.9.  $f \in K[x]$  とする .

- 1)  $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ ,  $a_n \neq 0$  と表されるとき,  $f$  の次数を  $n$  と定め,  $\deg f$  で表す . また,  $a_n$  を  $f$  の最高次の項の係数と呼ぶ .
- 2)  $f(x) = 0$  である場合には通常は  $f$  の次数は定めない . 但し, 便宜的に ( 臨時に ) 次数を定めることがある<sup>†4</sup> .
- 3)  $g \in K[x]$ ,  $g \neq 0$  とする . すると,  $\alpha, \beta \in K[x]$  であって  $f = \alpha g + \beta$ , かつ ( $\deg \beta < \deg g$  あるいは  $\beta = 0$ ) が成り立つものが一意的に存在する .  $\alpha$  を  $f$  を  $g$  で割った ( $f$  の  $g$  による) 商,  $\beta$  を  $f$  の  $g$  による剰余あるいは  $f$  を  $g$  で割った余りと呼ぶ .  $\beta = 0$  であるとき,  $f$  は  $g$  で割り切れるあるいは  $g$  は  $f$  を割り切るといい,  $g \mid f$  と表す . また,  $\beta \neq 0$  であるとき,  $g$  は  $f$  を割り切らないといい,  $g \nmid f$  と表す<sup>†5</sup> .  $g = 0$  の時には  $g$  による商, 剰余は定めない .
- 4)  $g, g' \in K[x]$  について  $f = g \cdot g'$  が成り立つならば  $g \in K$  あるいは  $g' \in K$  が成り立つとき,  $f$  は  $K$  上既約 ( あるいは  $K[x]$  において既約 ) であると言う .
- 5)  $K$  の元であるような  $K[x]$  の元を定数と呼ぶ<sup>†6</sup> .

問 11.1.10.  $f, g \in K[x]$  とし,  $g \neq 0$  とする .  $g$  による  $f$  の商, 剰余は一意的に定まることを示せ .

問 11.1.11. 1)  $A \in M_n(K)$  とすると  $A$  の最小多項式は一意的であることを示せ . また,  $A$  の最小多項式は  $A$  の固有多項式を割り切ることを示せ .

- 2)  $f$  を  $V$  の  $K$ -線型変換とすると  $f$  の最小多項式が一意的に存在することを示せ . また,  $f$  の最小多項式は  $f$  の固有多項式を割り切ることを示せ .
- 3)  $f$  を  $V$  の  $K$ -線型変換とする .  $\mathcal{V}$  を  $V$  の順序付き基底とし,  $A$  を  $\mathcal{V}$  に関する  $f$  の表現行列とする . すると  $f$  の最小多項式は  $A$  の最小多項式に ( $\mathcal{V}$  の選び方に依らず) 等しいことを示せ .

ヒント : 一意性を示すためには  $f, g$  がともに最小多項式であるとして  $f - g$  を考えてみるとよい .

例 11.1.12. ここでは固有多項式や最小多項式の変数を  $x$  とする .

<sup>†4</sup>例えば  $V_k = \{f \in K[x] \mid \exists a \in K, f(x) = ax^k\}$  とする . このときには  $\deg 0 = k$  と定めると  $V = \{f \in K[x] \mid f \text{ は } k \text{ 次の項のみからなる}\}$  と簡潔に表すことができ何かと都合が良い ( なお,  $k$  次の項のみからなる多項式を  $k$  次同次式 ( 同次多項式 ) と呼ぶ ) . しかし, 例えば  $V_1$  と  $V_2$  を同時に考えようとするとき,  $\deg 0 = 1$  かつ  $\deg 0 = 2$  でないと困る .  $0$  の次数を定めるのであれば, 特別扱いをすることとして前後の関係から  $1$  と  $2$  とともに考える, とせざるを得ない . このように,  $0$  の次数を定める際にはいろいろと注意が必要である .

<sup>†5</sup>ここでは新たに現れる記号を減らすため,  $g \mid f$  あるいは  $g \nmid f$  という記号は用いない . 抵抗がなければもちろん用いて構わない .

<sup>†6</sup>定数は次数が  $0$  であるような  $K[x]$  の元か, あるいは  $0$  である . 逆も成り立つ .

- 1)  $s \in K$  とし,  $A_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  と置く.  $A_s$  の固有多項式は  $s$  に依らず  $x^2 - 2x + 1$  である.  $A_s$  の最小多項式は,  $s \neq 0$  であれば  $(x - 1)^2$ ,  $s = 0$  であれば  $x - 1$  である.
- 2)  $E_n$  の固有多項式は  $(x - 1)^n$ , 最小多項式は  $x - 1$  である.
- 3)  $O_n$  の固有多項式は  $x^n$ , 最小多項式は  $x$  である.

命題 11.1.13.  $f_1, \dots, f_r \in K[x]$  とし, いずれの  $f_i$  も 0 ではないとする.

- 1)  $g \in K[x]$  であって, 条件
  - a) 各  $i$  について,  $h_i \in K[x]$  が存在して  $f_i = g \cdot h_i$  が成り立つ. つまり,  $g$  は  $f_i$  を割り切る.
  - b)  $g$  は全ての  $f_i$  を割り切るような  $K[x]$  の元の内, 次数が最高である. を満たすものが存在する.
- 2) 最高次の項の係数を 1 とすれば, 1) のような  $g$  は一意的である. また, ある  $g_1, \dots, g_r \in K[x]$  が存在して

$$g = f_1 g_1 + \dots + f_r g_r$$

が成り立つ.

このような  $g$  を  $f_1, \dots, f_r$  の最大公約元などと呼ぶ. 最高次の項の係数を 1 とすれば, 最大公約元は一意的である.

注 11.1.14. 命題 11.1.13 の 2) はこの後頻繁に用いる.

定義 11.1.15.  $f, g \in K[x]$  とする.  $f, g$  の最大公約元が  $K$  の元であるとき,  $f$  と  $g$  は互いに素 (mutually prime, coprime, etc.) であると言う.

定義 11.1.16.  $f \in K[x]$ , ただし  $f \neq 0$ , とする. また,  $f = f_1^{m_1} \dots f_r^{m_r}$  (ただし, 各  $i$  について  $m_i \in \mathbb{N}$ ,  $m_i > 0$ ) を,  $f$  の因数分解であって, 条件

- 1) 各  $f_i$  は  $K$  の元でない.
- 2)  $i \neq j$  ならば  $f_i$  と  $f_j$  は互いに素である.
- 3) 各  $f_i$  は  $K$  上既約である (定義 11.1.9).

を満たすとする. このような因数分解を  $f$  の  $K$  上の (あるいは  $K[x]$  における) 既約分解と呼ぶ. また, 各  $f_i$  を  $f$  の  $K$  上の既約因子などと呼ぶ.

定理 11.1.17.  $f \in K[x]$ ,  $f \neq 0$  とする.  $f$  の  $K$  上の既約分解は, 各  $f_i$  を  $K$  の零でない元 (定数) 倍で置き換えることを除いて一意的に定まる.

定理 11.1.17 は当たり前に見えるが，よく考えると証明はそれなりに難しい<sup>†7</sup>．例えば  $f = f_1 f_2 = f_3 f_4$  を共に  $f \in K[x]$  の既約分解とする．すると  $f_3$  あるいは  $f_4$  が  $f_1$  の  $K$  の零でない元倍であることが示される，ということである．興味があれば証明を考えてみると良い．詳細については可換環論の教科書にあたるとよい<sup>†8</sup>．

系 11.1.18.  $f \in K[x]$ ,  $f \neq 0$  とする．

- 1)  $f = a f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r}$ ,  $a \in K$ ,  $f_1, \dots, f_r \in K[x]$  .
- 2)  $f_1, \dots, f_r$  の最高次の項の係数は 1 に等しい .
- 3)  $\frac{1}{a} f = f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r}$  は  $\frac{1}{a} f$  の既約分解である .

とすると  $a \in K$ ,  $f_1, \dots, f_r \in K[x]$ ,  $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$  は一意的に定まる ( 整数の素因数分解との類似性に注意せよ ) .

例 11.1.19. 例えば  $f(x) = x^3 - 2$  とする .  $f \in \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$  である . まず  $K = \mathbb{C}$  とする .  $\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$  とすると ,  $f(x) = (x - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt[3]{2}\omega)(x - \sqrt[3]{2}\omega^2)$  が成り立ち , これが  $f$  の  $\mathbb{C}$  上の既約分解である . 次に  $K = \mathbb{R}$  とする .  $\omega \notin \mathbb{R}$  なので上の既約分解は  $\mathbb{R}[x]$  における因数分解ではない . 実際 ,  $f$  の  $\mathbb{R}$  上の既約分解は  $f(x) = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{2}^2)$  により与えられることを示すことができる . 最後に  $K = \mathbb{Q}$  とする . すると , 上の二つの既約分解はいずれも  $\mathbb{Q}[x]$  における因数分解ではない<sup>†9</sup> . 実際 ,  $f$  の  $\mathbb{Q}$  上の既約分解は  $f(x) = x^3 - 2$  で与えられることを示すことができる . つまり  $f$  は  $\mathbb{Q}$  上 ( $\mathbb{Q}[x]$  において) 既約である .

例えば  $f$  が  $A \in M_n(K)$  の固有多項式であるとする .  $f$  の因数分解はいろいろな  $K[x]$  で考えることができるが ,  $f$  の既約因子が一次式であるかどうかにより , 固有値が  $K$  内に存在するかどうかが決まる .

次が成り立つ .

- 定理 11.1.20. 1)  $f \in \mathbb{C}[x]$ ,  $f \neq 0$  とする .  $f$  の  $\mathbb{C}$  上の既約分解を  $f = f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r}$  とすると , 各  $f_i$  は一次式である .
- 2)  $f \in \mathbb{R}[x]$ ,  $f \neq 0$  とする .  $f$  の  $\mathbb{R}$  上の既約分解を  $f = f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r}$  とすると , 各  $f_i$  は一次式か二次式である .  $f_i$  が二次式であるとき ,  $f_i(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  とすると  $a_1^2 - 4a_2 a_0 < 0$  が成り立つ .

定理 11.1.20 の 1) と系 11.1.18 は代数学の基本定理をばらばらに述べたものである .

<sup>†7</sup>例えば命題 11.1.13 を用いる . また , あまりに話を一般化すると成り立たなくなる .

<sup>†8</sup>単項イデアル聖域 (Principal Ideal Domain) であるとか , 一意分解整域 (Unique Factorization Domain) , あるいはユークリッドの互除法といった単語が現れるあたりを探すのが良い .

<sup>†9</sup> $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$  が成り立つことは認める . これは  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  が成り立つことと同様に示すことができる .

問 11.1.21.  $A \in M_n(K)$  とし,  $f$  を  $A$  の最小多項式とする.  $f = f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r}$  を  $f$  の  $K$  上の既約分解とし,  $1 \leq i \leq r$  について  $h_i = f_1^{m_1} \cdots f_{i-1}^{m_{i-1}} f_{i+1}^{m_{i+1}} \cdots f_r^{m_r}$  と定める. すると, 命題 11.1.13 により  $g_1, \dots, g_r \in K[x]$  であって

$$h_1 g_1 + \cdots + h_r g_r = 1$$

が成り立つものが存在する. ここで  $P_i = h_i(A)g_i(A)$  とし,  $p_k: K^n \rightarrow K^n$  を  $p_k(v) = P_k v$  によりそれぞれ定める.

- 1)  $p_1 + \cdots + p_r = \text{id}_{K^n}$  が成り立つことを示せ.
- 2)  $p_i \circ p_j = \begin{cases} p_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  が成り立つことを示せ.
- 3)  $W_k = \text{Im } p_k$  と置くと,  $W_k$  は  $A$ -不変であって,  $K^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$  が成り立つことを示せ.

問 11.1.21 で与えられる分解  $K^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$  は  $W_i$  達に一定の条件を課せば一意的である.

定義 11.1.22 (これはここでの定義である).  $f \in K[x]$  について,  $W(f) = \{v \in K^n \mid f(A)v = 0\}$  と定める.

例 11.1.23.  $\lambda \in K$  とし,  $\lambda$  は  $A$  の固有値とする.  $f(x) = x - \lambda$  とすれば  $W(f)$  は  $A$  の  $\lambda$  に属する固有空間である. また,  $g(x) = (x - \lambda)^n$  とすれば  $W(g)$  は  $A$  の  $\lambda$  に属する広義固有区間 (一般固有空間) である (定義 11.2.2). 最後に  $f = \mu \in K$  とする.  $\mu \neq 0$  であれば  $W(f) = \{0\}$  であるし,  $\mu = 0$  であれば  $W(f) = K^n$  である.

- 問 11.1.24.
- 1)  $W(f)$  は  $K^n$  の  $A$ -不変な部分線型空間であることを示せ.
  - 2)  $W(f) \subset W(f^2)$  が成り立つことを示せ.
  - 3)  $f_1, \dots, f_r \in K[x]$  とし, いずれの  $f_j$  も  $K$  の元ではないとする. また,  $i \neq j$  であれば  $f_i$  と  $f_j$  は互いに素であるとする. このとき  $W(f_1) + \cdots + W(f_r)$  は直和であることを示せ. ヒント:  $g_i = f_1 \cdots f_{i-1} f_{i+1} \cdots f_r$  とすると  $g_1, \dots, g_r$  の最大公約元は 0 でない  $K$  の元である (ので 1 としてよい).
  - 4)  $f \in K[x]$ ,  $\deg f > 0$  とする.  $f = f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r}$  を  $f$  の既約分解とすると,  $W(f) = W(f_1^{m_1}) \oplus \cdots \oplus W(f_r^{m_r})$  が成り立つことを示せ.

問 11.1.25.  $f$  を  $A \in M_n(K)$  の最小多項式とする. また,  $g \in K[x]$  は定数ではなく, 既約であって,  $f$  を割り切らないとする. このとき, 任意の  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 0$  について  $W(g^m) = \{0\}$  が成り立つことを示せ.

問 11.1.26.  $K^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$  を直和分解であって, 条件

- 1) 各  $W_i$  は  $\{0\}$  ではない  $A$ -不変な部分線型空間である .
- 2) 各  $i$  について, ある既約な  $f_i \in K[x]$ ,  $\deg f_i > 0$  と  $m_i \in \mathbb{N}$ ,  $m_i > 0$  が存在して  $W_i = W(f_i^{m_i})$  かつ  $W(f_i^{m_i}) \supsetneq W(f_i^{m_i-1})$  が成り立つ .

を満たすものとする . このとき,  $f'_1, \dots, f'_r$  を  $f_1, \dots, f_s$  から (零でない  $K$  の元倍である場合には同一であると考えことにして) 重複を取り除いたものとする . その上で  $m'_i$  を,  $f'_i$  と同一である  $f_j$  に関して  $m_j$  の最大値を取ったものとする . 例えば  $f'_1 = f_1 = a_2 f_2 = a_3 f_3$ ,  $a_2, a_3 \in K$ ,  $a_2, a_3 \neq 0$  ならば  $m_1, m_2, m_3$  の最大値を  $m'_1$  とする . すると  $(f'_1)^{m'_1} \cdots (f'_r)^{m'_r}$  は  $A$  の最小多項式であることを示せ .

## 11.2. Jordan 標準形.

しばらく  $K = \mathbb{C}$  とするが,  $K = \mathbb{R}$  であっても (実行列を扱う場合でも) 固有値が実数であれば全く同様の議論が可能である<sup>†10</sup>. 更に,  $K = \mathbb{Q}$  であっても, 固有値がすべて有理数であるならばやはり全く同様の議論が可能である<sup>†11</sup>.

問 11.2.1.  $A \in M_n(\mathbb{C})$  の固有値は  $\lambda \in \mathbb{C}$  のみであるとする .

- 1) ある  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  と  $A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{C})$  が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ .

- 2)  $A_\lambda = A - \lambda E_n$  と置く .  $(A_\lambda)^n = O_n$  が成り立つことを示せ .
- 3)  $r$  を  $(A_\lambda)^r \neq O_n$  かつ  $(A_\lambda)^{r+1} = O_n$  なる自然数とする (記号 11.1.1 での約束により  $A_\lambda = O_n$  ならば  $r = 0$  である) .  $f_\lambda: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  を  $f_\lambda(v) = A_\lambda v$  により定めると,

$$K^n = \text{Im}(f_\lambda)^0 \supsetneq \text{Im}(f_\lambda) \supset \cdots \supset \text{Im}(f_\lambda)^r \supsetneq \text{Im}(f_\lambda)^{r+1} = \{0\}$$

が成り立つことを示せ .

- 4)  $(v_1^{(r)}, \dots, v_{n_r}^{(r)})$  を  $\text{Im}(f_\lambda)^r$  の順序付き基底とする .  $1 \leq j \leq n_r$  について  $u_j^{(r)} \in \mathbb{C}^n$  を  $(f_\lambda)^r(u_j^{(r)}) = v_j^{(r)}$  が成り立つように選ぶ . すると

$$(f_\lambda)^{r-1}(u_1^{(r)}), \dots, (f_\lambda)^{r-1}(u_{n_r}^{(r)}), (f_\lambda)^r(u_1^{(r)}), \dots, (f_\lambda)^r(u_{n_r}^{(r)})$$

は線型独立であることを示せ (注: 後半のベクトル達は  $v_1^{(r)}, \dots, v_{n_r}^{(r)}$  に等しい) .

<sup>†10</sup>なお,  $K = \mathbb{R}$  であって, 固有値が実数とは限らない場合の, 実数の範囲での扱いについては「11.3 実 Jordan 標準形」を参照のこと .

<sup>†11</sup> $K$  が一般の (可換) 体であっても, 固有値が  $K$  の元であるならば同様の議論が可能である .

5)  $(v_1^{r-1}, \dots, v_{n_{r-1}}^{r-1}, (f_\lambda)^{r-1}(u_1^{(r)}), \dots, (f_\lambda)^{r-1}(u_{n_r}^{(r)}), (f_\lambda)^r(u_1^{(r)}), \dots, (f_\lambda)^r(u_{n_r}^{(r)}))$  を  $((f_\lambda)^{r-1}(u_1^{(r)}), \dots, (f_\lambda)^{r-1}(u_{n_r}^{(r)}), (f_\lambda)^r(u_1^{(r)}), \dots, (f_\lambda)^r(u_{n_r}^{(r)}))$  を拡大して得られる  $\text{Im}(f_\lambda)^{r-1}$  の基底とする.

a)  $f_\lambda(v_j^{(r-1)}) = o$  が成り立つように  $v_j^{(r-1)}$  を選べることを示せ.

b) 4) と同様に,  $1 \leq j \leq n_{r-1}$  について  $u_j^{(r-1)} \in \mathbb{C}^n$  を,  $(f_\lambda)^{r-1}(u_j^{(r-1)}) = v_j^{(r-1)}$  が成り立つように選ぶと,

$$\begin{aligned} & (f_\lambda)^{r-2}(u_1^{(r-1)}), \dots, (f_\lambda)^{r-2}(u_{n_{r-1}}^{(r-1)}), (f_\lambda)^{r-2}(u_1^{(r)}), \dots, (f_\lambda)^{r-2}(u_{n_r}^{(r)}), \\ & (f_\lambda)^{r-1}(u_1^{(r-1)}), \dots, (f_\lambda)^{r-1}(u_{n_{r-1}}^{(r-1)}), (f_\lambda)^{r-1}(u_1^{(r)}), \dots, (f_\lambda)^{r-1}(u_{n_r}^{(r)}), \\ & (f_\lambda)^r(u_1^{(r)}), \dots, (f_\lambda)^r(u_{n_r}^{(r)}) \end{aligned}$$

は線型独立であることを示せ.

6) 4), 5) の作業を繰り返すと,  $\mathbb{C}^n$  の順序付き基底

$$\begin{aligned} & (u_1^{(0)}, \dots, u_{n_0}^{(0)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{n_1}^{(1)}, \dots, u_1^{(r)}, \dots, u_{n_r}^{(r)}, \\ & f_\lambda(u_1^{(1)}), \dots, f_\lambda(u_{n_0}^{(1)}), \dots, (f_\lambda)(u_1^{(r)}), \dots, f_\lambda(u_{n_r}^{(r)}), \\ & \dots, \\ & (f_\lambda)^r(u_1^{(r)}), \dots, (f_\lambda)^r(u_{n_r}^{(r)})) \end{aligned}$$

が得られることを示せ. また, これらの順序を入れ替えて得られる順序付き基底

$$\begin{aligned} & \overbrace{(u_1^{(0)}, \dots, u_{n_0}^{(0)})} \\ & \overbrace{f_\lambda(u_1^{(1)}), u_1^{(1)}, f_\lambda(u_2^{(1)}), u_2^{(1)}, \dots, f_\lambda(u_{n_1}^{(1)}), u_{n_1}^{(1)}} \\ & \dots, \\ & \overbrace{(f_\lambda)^r(u_1^{(r)}), (f_\lambda)^{r-1}(u_1^{(r)}), \dots, u_1^{(r)}, \dots, (f_\lambda)^r(u_{n_r}^{(r)}), (f_\lambda)^{r-1}(u_{n_r}^{(r)}), \dots, u_{n_r}^{(r)})} \end{aligned}$$

に関する  $f_\lambda$  の表現行列を求めよ. なお, ‘ $\overbrace{\quad}$ ’ でひとまとめに考えるとよいベクトルを便宜的に表した.

7) 6) で考えたベクトルを並べて得られる行列を  $P$  とする.  $P^{-1}AP$  を求めよ.

**定義 11.2.2.**  $A \in M_n(\mathbb{C})$  とし,  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  を  $A$  の相異なる固有値全体とする.  $\lambda$  が  $A$  の固有値であるとき

$$(11.2.3) \quad U_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n \mid \exists m \in \mathbb{N}, (A - \lambda E_n)^m v = o\}$$

とにおいて,  $\lambda$  に属する  $A$  の広義固有空間あるいは一般固有空間と呼ぶ.

問 11.2.4.  $\lambda$  を  $A$  の固有値とし,  $V_\lambda$  を  $\lambda$  に属する  $A$  の固有空間とする.  $U_\lambda$  は  $\mathbb{C}^n$  の部分線型空間であって,  $V_\lambda \subset U_\lambda$  が成り立つことを示せ. 特に  $U_\lambda \neq \{0\}$  である. また,  $\lambda$  が  $A$  の固有値でないときに, 式 (11.2.3) で  $U_\lambda$  を定めると  $U_\lambda = \{0\}$  が成り立つことを示せ.

問 11.2.5.  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  を互いに異なる  $\mathbb{C}$  の元とする.  $U_{\lambda_1} + \dots + U_{\lambda_r}$  は直和であることを示せ. ヒント:  $u_i \in U_{\lambda_i}$ ,  $u_i \neq 0$  とすると  $u_1, \dots, u_r$  は線型独立であることを示すのが簡単である. 固有空間の場合を参考にすると良い.

定義 11.2.6 (問 5.9 も参照のこと).  $\lambda \in K$  とする.  $N_n, J_n(\lambda) \in M_n(K)$  を

$$N_n = \begin{cases} (0), & n = 1, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, & n > 1, \end{cases}$$

$$J_n(\lambda) = \lambda E_n + N_n$$

により定める. ただし, 空白の部分の成分は全て 0 とする.  $J_n(\lambda)$  を  $n$  次の Jordan block あるいは Jordan 細胞 (Jordan cell) と呼ぶ.

例 11.2.7.  $J_n(\lambda)$  を  $n$  次の Jordan block とすると,  $J_n(\lambda)$  の固有多項式と最小多項式は共に  $(x - \lambda)^n$  である.

問 11.2.8.  $A \in M_n(\mathbb{C})$  とし,  $f \in \mathbb{C}[x]$  を  $A$  の最小多項式とする.  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  を  $A$  の相異なる固有値全体とすると, 正整数  $n_1, \dots, n_r$  が一意的に存在して

$$f(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_r)^{n_r}$$

が成り立つことを示せ.

ヒント:  $A$  の固有多項式も上と同じ形に既約分解される. 一方, 最小多項式は固有多項式を割り切る. 各  $n_i$  が 0 でないことは例えば命題 11.1.13 の 2) を用いれば示せる.

問 11.2.9.  $A \in M_n(K)$  とする.

- 1)  $A$  が  $\mathbb{C}$  上対角化可能であることと,  $A$  の最小多項式が複素数の範囲で重根を持たないことは同値であることを示せ.
- 2)  $A$  が  $K$  上対角化可能であることと,  $A$  の最小多項式が  $K$  上で互いに相異なる一次式の積に既約分解されることは同値であることを示せ.

さて,  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, n_1, \dots, n_r$  を問 11.2.8 のように定める.  $h_i(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_{i-1})^{n_{i-1}} (x - \lambda_{i+1})^{n_{i+1}} \cdots (x - \lambda_r)^{n_r}$  と定めると,  $h_1, \dots, h_r$  の最大公約元は 1 であるから, 命題 11.1.13 により,  $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{C}[x]$  であって

$$\begin{aligned} & h_1(x)g_1(x) + \cdots + h_r(x)g_r(x) \\ &= (x - \lambda_2)^{n_2} \cdots (x - \lambda_r)^{n_r} g_1(x) + (x - \lambda_1)^{n_1} (x - \lambda_3)^{n_3} \cdots (x - \lambda_r)^{n_r} g_2(x) \\ & \quad + \cdots + (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_{r-1})^{n_{r-1}} g_r(x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

が恒等的に成り立つものが存在する. ここで  $P_k \in M_n(\mathbb{C})$  を  $P_k = h_k(A)g_k(A)$ ,  $p_k: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  を  $p_k(v) = P_k v$  によりそれぞれ定める. 問 11.1.21 により

$$1) p_1 + \cdots + p_r = \text{id}_{\mathbb{C}^n},$$

$$2) p_i \circ p_j = \begin{cases} p_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

がそれぞれ成り立つ.

問 11.2.10. 1)  $\text{Im } p_k = W_{\lambda_k}$  が成り立つことを示せ.

2)  $\mathbb{C}^n = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_r}$  が成り立つことを示せ.

3)  $A \in M_n(\mathbb{C}^n)$  が与えられたとき,  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  を  $P^{-1}AP$  が Jordan block の直和になるように選ぶ方法を考えよ. このとき,  $P^{-1}AP$  を  $A$  の Jordan 標準形 (Jordan canonical form) と呼ぶ<sup>†12</sup>.

また, 各  $p_i$  を  $W_{\lambda_i}$  への射影子 (projector) と呼ぶ.

定理 11.2.11.  $A \in M_n(\mathbb{C})$  とする.  $A$  の Jordan 標準形は Jordan block の並べ替えを除いて一意に定まる.

証明はここでは扱わない (問 11.1.26 を用いれば難しくはない. 問 11.4.22 も参照のこと).

問 11.2.12.  $A$  を以下のように定めるとき,  $P^{-1}AP$  が Jordan 標準形となるような正則行列  $P$  の一つと,  $A$  の Jordan 標準形を求めよ.

<sup>†12</sup>明確な定義があるわけではないが「canonical」(規範的)であるためには一定の普遍性が求められる. Jordan 標準形は求められる普遍性をほとんど満たさず, 恐らくそのために canonical form と呼びたがらない人は少なくないように思われる (用語としては定着している).

ヒント：特にサイズが小さい場合などは，先に Jordan 標準形がわかってしまうことも多い．必ずしもこの節で述べた一連の流れに沿う必要はない．

$$1) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} -65 & -27 & -14 & -24 & 47 \\ -41 & -15 & -8 & -14 & -29 \\ 10 & 4 & 4 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 115 & 47 & 23 & 41 & 83 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}, \text{ただし } t, s \in \mathbb{C}$$

ヒント：2) 例えば  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  としてみよ．適宜計算機を用いても構わないが，練習なので過度に頼らないこと．

### 11.3. 実 Jordan 標準形.

$A \in M_n(\mathbb{R})$  とし， $A$  の (複素数の範囲での) Jordan 標準形が  $J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{n_p}(\lambda_p)$  であるとする． $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  は  $A$  の固有値である ( $i \neq j$  かつ  $\lambda_i = \lambda_j$  であることもありうる)．ここで  $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ ， $\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_p \notin \mathbb{R}$  とする． $A \in M_n(\mathbb{R})$  であるから，ある  $\mu_1, \dots, \mu_u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ，ただし  $p - s = 2u$ ，について<sup>†13</sup>， $(\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_p) = (\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_u, \bar{\mu}_u)$ ，ただし  $1 \leq k \leq u$  について  $\text{Im } \mu_k > 0$  が成り立つ，として良い．

問 11.3.1.  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  を  $A$  の固有値とし， $W_\mu$  を  $\mu$  に属する  $A$  の広義固有空間とする． $\bar{\mu}$  も  $A$  の固有値であって， $W_\mu$  から  $W_{\bar{\mu}}$  への  $\mathbb{R}$ -線型同型写像が存在することを示せ．

ヒント：要は複素共役を取れば良い．複素共役を取る操作は複素線型ではないが，実線型である．

問 11.3.2 (問 7.7 も参照のこと)．次が成り立つことを示せ． $R(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ ，但し  $0 \leq \theta < \pi$ ，また，

$$J_{\mathbb{R}, n}(r, \theta) = \begin{pmatrix} R(r, \theta) & E_2 & & & \\ & R(r, \theta) & E_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & R(r, \theta) & E_2 \\ & & & & R(r, \theta) \end{pmatrix}$$

と置く．ただし  $J_{\mathbb{R}, 1}(r, \theta) = R(r, \theta)$  とする． $1 \leq k \leq u$  について  $\mu_k = r_k e^{\sqrt{-1}\theta_k}$  とすると，ある  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  が存在して

$$(11.3.3) \quad P^{-1}AP = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{n_s}(\lambda_s) \oplus J_{\mathbb{R}, n_{s+1}}(r_1, \theta_1) \oplus J_{\mathbb{R}, n_{s+3}}(r_2, \theta_2) \oplus \cdots \oplus J_{\mathbb{R}, n_{p-1}}(r_u, \theta_u),$$

が成り立つ．

<sup>†13</sup> $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \notin \mathbb{R}\}$  であった．

式 (11.3.3) の右辺は並べ替えを除いて一意である ( $P$ によらない) ことが示される。式 (11.3.3) の右辺を  $A$  の実 Jordan 標準形と呼ぶ。実 Jordan 標準形は、ブロックの並べ替えを除いて  $A$  のみにより定まる。

#### 11.4. 有理標準形 (Frobenius 標準形).

Jordan 標準形は、その形が固有値に強く依存していて、実数や有理数の範囲ではしばしば求められない。実数の場合には実 Jordan 標準形を用いることもできるが、有理数の範囲ではやはりうまくいかない。ここでは固有値が明示的には現れない (強い関係はある) 標準形の一つとして、有理標準形を扱う。以下では  $K$  は  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$  のいずれかとする<sup>†14</sup>。

定義 11.4.1 (問 1.14, 1.15 も参照のこと).  $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$  とする。

$$C_n(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

とおいて、 $n$  次のコンパニオン行列と呼ぶ。ただし、 $C_1(a_0) = (-a_0)$  と定める。記号  $C_n(a_0, \dots, a_{n-1})$  はここでのものであって、一般的なものではない。

定義 11.4.2.  $A \in M_n(K)$ ,  $v \in K^n$  とする。 $v, Av, \dots, A^{n-1}v$  で生成される  $K^n$  の部分線型空間を、 $v$  により生成される巡回部分空間 (巡回部分線型空間) と呼ぶ。 $K$ -線型空間  $V$  と  $V$  の  $K$ -線型変換についても同様に定める。

問 11.4.3.  $A \in M_n(K)$  とし、 $C(v)$  を  $v \in K^n$  で生成される巡回部分空間とする。

- 1)  $C(v)$  は  $A$ -不変な部分線型空間であることを示せ。特に、任意の  $k \in \mathbb{N}$  について  $A^k v \in C(v)$  が成り立つことを示せ。
- 2)  $A$  の最小多項式の次数を  $r$  とすると、 $C(v)$  は  $v, \dots, A^{r-1}v$  で生成されることを示せ。
- 3)  $C'(v) = \left\{ w \in K^n \mid \begin{array}{l} \exists m \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K, k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}, \\ 0 \leq k_1 < \dots < k_m, w = \lambda_1 A^{k_1} v + \dots + \lambda_m A^{k_m} v \end{array} \right\}$  とおくと  $C'(v) = C(v)$  が成り立つことを示せ。

注： $C'(v)$  は  $\{A^k v \mid k \in \mathbb{N}\} = \{v, Av, \dots, A^k v, \dots\}$  で生成される  $K^n$  の部分線型空間である。

- 4)  $C(v) = \{w \in K^n \mid \exists f \in K[x], w = f(A)v\}$  が成り立つことを示せ。

ヒント： $C(v) = C'(v)$  が成り立つことを用いると容易である。

<sup>†14</sup> $K$  は一般の (可換) 体でよい。

$A = C_n(a_0, \dots, a_{n-1})$  をコンパニオン行列とする． $a_0 \neq 0$  であるとき， $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$  とす

ると  $\{v, Av, \dots, A^{n-1}v\}$  は  $K^n$  の基底である．これの逆を考えてみる．

問 11.4.4.  $A \in M_n(K)$  とし， $K^n$  の線型変換  $f$  を  $f(v) = Av$  により定める． $v \in K^n$  について  $\mathcal{V} = (v, Av, \dots, A^{n-1}v)$  が  $K^n$  の順序付き基底であるとする．このとき， $f$  の  $\mathcal{V}$  に関する表現行列は  $n$  次のコンパニオン行列であることを示せ．

一般には  $C_n(a_0, \dots, a_{n-1})$  において  $a_0 \neq 0$  であるとは限らないし，また ( $a_0 \neq 0$  であっても) 例えば  $v = o$  の場合を考えれば分かるように， $\{v, Av, \dots, A^{n-1}v\}$  は必ずしも  $C(v)$  の基底ではない．いつ基底となるかについては問 11.4.18 で扱うこととして先に進む．

問 11.4.5 (問 2.14 も参照のこと).  $C = C_n(a_0, \dots, a_{n-1})$  とする．

- 1)  $C$  の固有値，固有空間を複素数の範囲で考えることにする<sup>††15</sup>．各固有値について，その固有値に属する固有空間は 1 次元であることを示せ．
- 2)  $e_1, \dots, e_n$  を  $K^n$  の基本ベクトルとすると， $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$  について  $C^k = (e_{k+1} \cdots e_n)^*$  が成り立つことを示せ．
- 3)  $C$  の固有多項式と最小多項式は共に  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[x]$  に等しいことを示せ (ここで， $x$  は固有多項式，最小多項式の変数である)．  
ヒント：2) か 1) を用いるのが容易である<sup>††16</sup>．

ここでの目標は次を示すことである．

定理 11.4.6.  $A \in M_n(K)$  とする． $P \in GL_n(K)$  と，コンパニオン行列  $C_1, \dots, C_s$  であって， $e_k$  を  $C_k$  の固有多項式 (問 11.4.5 により最小多項式としても同じことである) とすると，条件

- 1)  $i = 1, \dots, s-1$  について， $e_i$  は  $e_{i+1}$  を割り切る．
- 2)  $e_s$  は  $A$  の最小多項式である．
- 3)  $e_1 \cdots e_s$  は  $A$  の固有多項式に等しい．

<sup>††15</sup>一般の  $K$  の場合にはその代数 (的) 閉包と呼ばれる，任意の  $f \in K[x]$  について， $f$  の全ての根がそこに属するような体  $\bar{K}$  上で考える．このとき，任意の  $f \in \bar{K}[x]$  について，その全ての根は  $\bar{K}$  に属する． $K = \mathbb{R}$  ならば  $\bar{K} = \mathbb{C}$  である (一方， $\bar{\mathbb{Q}} \subsetneq \mathbb{C}$  が成り立つ． $\bar{\mathbb{Q}}$  の元は代数的数と呼ばれる)． $\mathbb{C}[x]$  の元の根が  $\mathbb{C}$  に属するという性質は代数学の基本定理に対応する．

<sup>††16</sup>今は  $K$  は  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  あるいは  $\mathbb{C}$  としているので難しいことを考えなくて良いが，1) を一般の  $K$  について用いる場合には代数閉包に関する知識が要る．

を満たす<sup>†17</sup>ものが一意的に存在して

$$(11.4.7) \quad P^{-1}AP = C_1 \oplus \cdots \oplus C_s$$

が成り立つ<sup>†18</sup>. 式 (11.4.7) の右辺を  $A$  の有理標準形 (rational normal form) あるいは Frobenius 標準形 (Frobenius normal form) と呼ぶ.

有理標準形は微分方程式・差分方程式や漸化式と関連が深い. また, 対角化や Jordan 標準形と異なり,  $K$  の範囲で話が済むことに特徴あるいは意義がある.

例 11.4.8. 1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする. 例えば  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  とすると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = C_2(2, -3)$$

が成り立ち, 右辺は  $A$  の有理標準形である.  $A, P^{-1}AP$  の固有多項式, 最小多項式は共に  $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$  である.

2)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする. 例えば  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  とすると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = C_2(1, -2)$$

が成り立ち, 右辺は  $A$  の有理標準形である.  $A, P^{-1}AP$  の固有多項式, 最小多項式は共に  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$  である.

3)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする. 例えば  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  とすると,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = C_1(-1) \oplus C_2(1, -2)$$

が成り立ち, 右辺は  $A$  の有理標準形である.  $A, P^{-1}AP$  の固有多項式は  $(x - 1)^3$ , 最小多項式は  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$  である.

問 11.4.9. ここでは実数  $t$  を変数とする常微分方程式を考える. 話を簡単にするため, 定義域は  $\mathbb{R}$  全体とするが, 例えば開区間  $(0, 1)$  や閉区間  $[0, 1]$  などでもよい.

微分可能なベクトル値関数  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  に関する常微分方程式

$$(11.4.10) \quad \frac{d}{dy}y = Ay$$

<sup>†17</sup>この条件は  $A$  の単因子と関連が深い.

<sup>†18</sup>対角化や Jordan 標準形については「並べ替えを除いて」という条件が付いたが, ここでは付かない. これは条件 1) に因る.

を考える．ここで  $A \in M_n(\mathbb{R})$  とする（このような方程式は  $y$  に関する定数係数の線型常微分方程式，あるいは  $y$  の成分  $y_1, \dots, y_n$  に関する定数係数の線型常微分方程式系と呼ばれる）．方程式 (11.4.10) の一般解は

$$y(t) = \exp(tA)y_0$$

で与えられるが，一般には  $\exp(tA)$  を求める際には Jordan 標準形あるいは実 Jordan 標準形を考えるのが一般的である．有理標準形を考えることにして，これを避けることもできる<sup>†19</sup>．ただし，定義 11.4.1 そのものではなく，転置行列

$${}^tC_n(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

を考える．すると， $P \in GL_n(K)$  とコンパニオン行列  $C_1, \dots, C_r$  が存在して  $P^{-1}AP = {}^tC_1 \oplus \cdots \oplus {}^tC_r$  が成り立つ<sup>†20</sup>．これを  $B$  と置く． $y$  が (11.4.10) の解であるとして， $z = P^{-1}y$  と置けば， $z$  は

$$(11.4.11) \quad \frac{d}{dt}z = Bz$$

の解である．逆に  $z$  が (11.4.11) の解であるならば， $y = Pz$  と置けば  $y$  は (11.4.10) の解である．ここでは，このように  $P \in GL_n(K)$  を通じて解が一对一に対応するときに (11.4.10) と (11.4.11) は同値であるということにする．

1)  $r = 1$  とする． $z$  の成分を  $z_1, \dots, z_n$  とし， $f = z_1$  と置く．すると，(11.4.11) は

$$(11.4.12) \quad \frac{d^n f}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 f = 0$$

と同値であることを示せ．

2)  $r$  が一般の場合，(11.4.12) と同様の常微分方程式が  $r$  個存在して，(11.4.11) は（従って (11.4.10) は）これらの方程式からなる常微分方程式系と同値であることを示せ．

3) 形式的に  $y$  や  $z$  に複素数値を許すことにして，(11.4.12) の一般解を求めよ． $y$  や  $z$  の定義域は本当は大切であるが，ここではおおらかに考えて良い．

ヒント: Jordan 標準形や行列の指数函数を用いて解くこともできるが，次のように Jordan 標準形を用いないで解くこともできる．いわゆる「演算子法」と呼ばれる解法は以下の解き方を一般化したものの一つである． $\varphi(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[t]$  とおく．

<sup>†19</sup>ただし，解（厳密解）を求めるためには固有方程式を解くことは避けられない．

<sup>†20</sup>例えば  ${}^tA$  を  $Q \in GL_n(K)$  を用いて有理標準形に変形する． $Q^{-1}{}^tAQ$  は有理標準形であるから， $P = {}^tQ^{-1}$  とすれば  $P^{-1}AP$  は  ${}^tC_i$  達の直和である．

$C^r(\mathbb{R}; \mathbb{C}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ は } C^r \text{ 級}\}$  とし,  $D = \frac{d}{dx}$  を  $C^r(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  から  $C^{r-1}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$  への  $\mathbb{C}$ -線型写像とみなす. すると  $\varphi$  において  $D$  を  $t$  に代入することができて, 定義により

$$\varphi(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0$$

ただし  $D^k = \overbrace{D \circ \cdots \circ D}^{k \text{ 個}} = \frac{d^k}{dx^k}$  である. また, 最後の  $a_0$  は函数の  $a_0$  倍を表す. 従って  $(\varphi(D))(f)$  は (11.4.12) の左辺に等しい. 一方,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  を  $\varphi(t) = 0$  の解とする. ただし, 重解が存在する場合には重複度だけその解を並べる. すると

$$(D - \lambda_1) \circ \cdots \circ (D - \lambda_n) = \varphi(D)$$

が成り立つ (例えば左辺を展開して解と係数の関係を用いれば示せる). 従って  $(D - \lambda)f = g$ ,  $g$  は  $x$  の函数, の形の微分方程式が解ければ  $(\varphi(D))(f) = 0$  は解ける. 今の場合には  $g$  として特別な形をした函数だけを考えれば良いことが分かり, (11.4.12) を解くことができる.

- 4)  $y$  や  $z$  が実数値であるような範囲で (11.4.12) の一般解を求めよ.  $y$  や  $z$  の定義域は本当は大切であるが, ここではおおらかに考えて良い.

問 11.4.13. 問 11.4.9 の (有理, 実あるいは複素) 数列における類似について考えよ (これは差分方程式などと関連が深い).

ここからは, 与えられた  $M_n(K)$  の元を有理標準形に変形することを考える.

問 11.4.14.  $A \in M_n(K)$  とし,  $K^n$  の線型変換  $\varphi$  を  $\varphi(v) = Av$  により定める. また,  $f, f_i, g_i, h_i, P_i, p_i, W_i$  を問 11.1.21 のように定め,  $\varphi_i$  を  $\varphi$  の  $W_i$  への制限とする.

- 1)  $f_i(\varphi_i)^{m_i} = 0$  が成り立つことを示せ.
- 2)  $f_i(\varphi_i)^{m_i-1} \neq 0$  が成り立つことを示せ.
- 3)  $\varphi_i$  の最小多項式は  $f_i^{m_i}$  であることを示せ.

ヒント: 1) は  $W_i$  が  $p_i = g_i(A)h_i(A)$  の像であることに注目すると良い. 2) を示すためには, 例えば  $f_i(\varphi_i)^{m_i-1} = 0$  と仮定する.  $v \in K^n$  を  $v = v_1 + \cdots + v_r$ ,  $v_j \in W_j$  と表すと  $k \neq i$  について  $f_k(A)^{m_k}v_k = f_k(\varphi)^{m_k}v_k = f_k(\varphi_k)^{m_k}v_k = 0$  が成り立つ. 従って,  $f' = f_1^{m_1} \cdots f_{i-1}^{m_{i-1}} f_i^{m_i-1} f_{i+1}^{m_{i+1}} \cdots f_r^{m_r}$  と置くと  $f'(A)v = 0$  が成り立つ.  $f' \neq 0$  かつ  $f'$  の最高次の項の係数は 1 なので, これは  $f$  が最小多項式であることに反する.

定義 11.4.15 (定義 11.1.6 も参照のこと).  $A \in M_n(K)$  とする.  $f \in K[x]$  が ( $A$  に関する)  $v \in K^n$  の消去多項式 (annihilating polynomial) であるとは, 条件

- 1)  $f \neq 0$  かつ  $f(A)v = 0$

を満たすことを言う．さらに条件

- 2)  $f$  は 1) を満たすようなもののうち，次数が最低である．さらに， $f$  の最高次の項の係数は 1 に等しい．

が成り立つとき， $f$  は  $v$  の最小消去多項式 (minimal annihilating polynomial<sup>†21</sup>) であると言う．

$K$ -線型空間  $V$  と  $K$ -線型変換についても， $v \in V$  の最小消去多項式を同様に定める．

問 11.4.16.  $A \in M_n(K)$ ， $v \in K^n$  とすると  $v$  の最小消去多項式が一意的に存在することを示せ．また， $v$  の最小消去多項式は  $A$  の最小多項式を割り切ることを示せ．

ヒント：問 7.10 や 11.1.11 と似たような理由である．

例 11.4.17. 1) 固有多項式や最小多項式の変数を  $x$  とする． $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  とすると， $A$  の固

有多項式，最小多項式はいずれも  $x^2$  である． $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  の最小消去多項式は  $x$  であり， $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  の最小消去多項式は  $x^2$  である．

- 2)  $A \in M_n(K)$  とする． $o \in K^n$  の最小消去多項式は 1 である．

問 11.4.18.  $A \in M_n(K)$  とし， $v \in K^n$ ， $v \neq o$  とする． $v$  の最小消去多項式の次数を  $r$  とすると  $\{v, Av, \dots, A^{r-1}v\}$  は  $C(v)$  の基底であることを示せ．特に  $\dim C(v) = r$  である．

$v = o$  ならば  $C(v) = \{o\}$  なので，基底は  $\{\}$  (空集合) で与えられる．また， $v \neq o$  の時には  $\{v, Av, \dots, A^{r-1}v\}$  を  $C(v)$  の順序付き基底として考えることが多い (問 11.4.4 も参照のこと)．

問 11.4.19. <sup>†22</sup> $A \in M_n(K)$  とする．そして， $K$  上既約であって，最高次の項の係数は 1 に等しいような  $f \in K[x]$  と  $m \in \mathbb{N}$ ， $m \geq 1$  が存在して， $A$  の最小多項式は  $f^m$  に等しいとする．ここで  $F = f(A)$  と置き， $U_0 = K^n$ ， $U_1 = f(A)(U_0) = F(U_0)$ ， $\dots$ ， $U_{m-1} = F^{m-1}(U_0)$ ， $U_m = F^m(U_0) = \{o\}$  とする． $\{o\} = U_m \subsetneq U_{m-1} \subset U_{m-2} \subset \dots \subset U_0 = K^n$  が成り立つ．また，両辺が定義されれば  $U_k = F(U_{k-1})$  が成り立つ (特に  $U_1 = \text{Im } F$  である)．最後に，この間においては便宜的に  $\deg 0 = -1$  とする．

- 1)  $v \in U_{m-1}$ ， $v \neq o$  とする． $v$  の最小消去多項式は  $f$  に等しいことを示せ．

$v \in U_{m-1}$  について  $C(v) = \langle v, Av, \dots, A^{p-1}v \rangle$  と置く．ただし  $p = \deg f$  とする．

- 2)  $v \in U_{m-1}$ ， $v \neq o$  について  $\dim C(v) = p$  が成り立つことを示せ．

<sup>†21</sup>次の問 11.4.16 にあるように唯一 (で，万人が知っている存在) なので，実際には ‘the [...]’ として用いる．これに関しては，固有多項式などの同様の性質をもつものについても同じことが言える．一方，消去多項式は一般にはたくさんあるので，既に特定のものが指定されているのであれば ‘an annihilating polyomial’ である．

<sup>†22</sup>本問の作成にあたっては，ジョルダン標準形 (UP 応用数学選書 8)，韓太舜，伊理正夫著，東京大学出版会，1982 の § 3.2 を参考にした．

$v_1, \dots, v_k \in U_{m-1}, v_1, \dots, v_k \neq o$  とする . また ,  $C_k = C(v_1) + \dots + C(v_k)$  は直和であるとする .  
 ただし  $k \in \mathbb{N}, k > 0$  とする<sup>†23</sup> .  $C_k \subsetneq U_{m-1}$  とし ,  $u \in U_{m-1} \setminus C_k$  とする . もし  $C_k \cap C(u) = \{o\}$   
 であれば ,  $C_k + C(u)$  は直和であるから ,  $C(v_1) + \dots + C(v_k) + C(u)$  は直和である . 一方 ,  
 $w \in C_k \cap C(u), w \neq o$  が成り立つとすると ,

$$(11.4.20) \quad \begin{cases} w = \lambda_0^{(1)}v_1 + \dots + \lambda_{p-1}^{(1)}A^{p-1}v_1 + \dots + \lambda_0^{(k)}v_k + \dots + \lambda_{p-1}^{(k)}A^{p-1}v_k \\ = \mu_0u + \dots + \mu_{p-1}A^{p-1}u (\neq o) \end{cases}$$

が , ある  $\lambda_0^{(j)}, \dots, \lambda_{p-1}^{(j)}, \mu_0, \dots, \mu_{p-1} \in K, 1 \leq j \leq k$  について成り立つ . ここで  $g_j, h \in K[x]$  を

$$g_j(x) = \lambda_0^{(j)} + \lambda_1^{(j)}x + \dots + \lambda_{p-1}^{(j)}x^{p-1},$$

$$h(x) = \mu_0 + \mu_1x + \dots + \mu_{p-1}x^{p-1}$$

により定める . すると  $\deg g_j, \deg h \leq p-1 < \deg f$  が成り立つ . また ,  $h \neq 0$  が成り立つ .

3)  $g_1, \dots, g_k$  を固定する .  $h$  を  $h' \in K[x], \deg h' < \deg f$  に置き換えても (11.4.20) が成り立つとすると ,  $h' = h$  が成り立つことを示せ .

ヒント :  $\deg h', \deg h \leq p-1 < \deg f$  かつ  $u \neq o$  であることを踏まえて  $h' - h$  を考えてみよ .

4)  $g_1, \dots, g_k$  を  $g'_1, \dots, g'_k \in K[x], \deg g'_j < \deg f$  に置き換えても (11.4.20) が成り立つとすると ,  $g'_j = g_j$  が  $1 \leq j \leq k$  について成り立つことを示せ .

ヒント :  $v_1, Av_1, \dots, A^{p-1}v_1, \dots, v_k, Av_k, \dots, A^{p-1}v_k$  は線型独立である .

従って (11.4.20) において  $g_1, \dots, g_k, h$  は一意的である .

5)  $g'_i$  を  $g_i$  を  $h$  で割った余りとする . 即ち ,  $g_i = \varphi_i h + g'_i, \varphi_i, g'_i \in K[x]$  とし ,  $g'_i = 0$  あるいは  $\deg g'_i < \deg g_i$  が成り立つとする .  $u' = u - \varphi_1(A)v_1 - \dots - \varphi_k(A)v_k$  と置くと

$$u' \neq o,$$

$$h(A)u' = g'_1(A)v_1 + \dots + g'_k(A)v_k$$

が成り立つことを示せ .

$u' \neq o$  であるから ,  $u'$  の最小消去多項式は  $f$  である . 従って  $f = \psi h + f', \psi, f' \in K[x], \deg f' < \deg h$  とすると

$$o = f(A)u' = \psi(A)h(A)u' + f'(A)u' = \sum_{j=1}^k \psi(A)g'_j(A)v_j + f'(A)u'$$

が成り立つ . さて ,  $\deg h < \deg f$  であるから  $\psi \neq 0$  が成り立つ . 従って , 式 (11.4.20) における  $g_1, \dots, g_k, h$  の一意性と ,  $\deg f' < \deg h$  であることから  $f' = 0, g'_j = 0, 1 \leq j \leq k$  が成り立つ

<sup>†23</sup> $k = 1$  であれば  $C_1 = C(v_1)$  は ( $C(v_1)$  一つの) 直和であると考ええる .

つ．よって  $h(A)u' = o$  が成り立つので， $h \neq 0$  かつ  $\deg h < \deg f$  であることから  $u' = o$  が成り立つが，これは  $u$  の選び方に反する．従って  $C_k + C(u)$  は直和である．すると， $U_{m-1}$  の順序付けられた元の組  $(v_1^{(m-1)}, \dots, v_{s_{m-1}}^{(m-1)})$  で，

$$\begin{aligned} & (v_1^{(m-1)}, Av_1^{(m-1)}, \dots, A^{m-1}v_1^{(m-1)}, \\ & v_2^{(m-1)}, Av_2^{(m-1)}, \dots, A^{m-1}v_2^{(m-1)}, \\ & \quad \vdots \\ & v_{s_{m-1}}^{(m-1)}, Av_{s_{m-1}}^{(m-1)}, \dots, A^{m-1}v_{s_{m-1}}^{(m-1)}) \end{aligned}$$

が  $U_{m-1}$  の順序付き基底であるようなものを次のように定めることができる．

- i)  $U'_{m-1}(0) = \{o\}$  とする．また， $k = 0$  とする．
- ii)  $U'_{m-1}(k) = U_{m-1}$  ならば  $U_{m-1}$  の基底が得られているのでここで終了する． $U'_{m-1}(k) \neq U_{m-1}$  ならば， $v_{k+1}^{(m-1)}$  を  $U_{m-1} \setminus U'_{m-1}(k)$  の元とする．
- iii)  $U'_{m-1}(k+1) = U'_{m-1}(k) + C(v_{k+1}^{(m-1)})$  と置き， $k$  を  $k+1$  に置き換えて ii) を再度行う．

次に  $U_{m-2}$  の順序付き基底を次のように選ぶ． $U_{m-1} = \text{Im } F^{m-1}$  であるから， $u_1^{(m-1)}, \dots, u_{s_{m-1}}^{(m-1)} \in U_0 = K^n$  であって， $v_j^{(m-1)} = F^{m-1}(u_j^{(m-1)})$  が成り立つものが存在する． $F^{m-2}(u_j^{(m-1)}) \in U_{m-2}$  に注意して，

$$U'_{m-2}(0) = C(F^{m-2}(u_1^{(m-1)})) + \dots + C(F^{m-2}(u_{s_{m-1}}^{(m-1)}))$$

と置く．右辺は直和である（確かめよ）．ここで  $F$  の  $U_{m-2}$  への制限を  $F|_{U_{m-2}}$  で表す． $F|_{U_{m-2}}$  は  $U_{m-2}$  から  $U_{m-1}$  への写像である．そして

$$K_{m-2} = \text{Ker } F|_{U_{m-2}} \cap U'_{m-2}(0)$$

と置く．

- 6)  $K_{m-2} = C(F^{m-1}(u_1^{(m-1)})) \oplus \dots \oplus C(F^{m-1}(u_{s_{m-1}}^{(m-1)})) = C(v_1^{(m-1)}) \oplus \dots \oplus C(v_{s_{m-1}}^{(m-1)})$  が成り立つことを示せ．
- 7)  $u_1^{(m-2)}, \dots, u_{s_{m-2}}^{(m-2)} \in U_0$  が存在して，

$$\text{Ker } F|_{U_{m-2}} = K_{m-2} \oplus \left( C(F^{m-3}(u_1^{(m-2)})) \oplus \dots \oplus C(F^{m-3}(u_{s_{m-2}}^{(m-2)})) \right)$$

が成り立つことを示せ．また，

$$U_{m-2} = U'_{m-2}(0) \oplus \left( C(F^{m-3}(u_1^{(m-2)})) \oplus \dots \oplus C(F^{m-3}(u_{s_{m-2}}^{(m-2)})) \right)$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：5) の直後までの， $C_k + C(u)$  が直和であることの証明と同様に考えてみよ．ただし  $K_{m-2}$  というおまけが付く．

8)  $u_1^{(0)}, \dots, u_{s_0}^{(0)}, \dots, u_1^{(m-1)}, \dots, u_{s_{m-1}}^{(m-1)} \in U_0$  が存在して,  $K^n = U_0 = C(u_1^{(0)}) \oplus \dots \oplus C(u_{s_0}^{(0)}) \oplus \dots \oplus C(F^{m-1}(u_1^{(m-1)})) \oplus \dots \oplus C(F^{m-1}(u_{s_{m-1}}^{(m-1)}))$  が成り立つことを示せ.

問 11.4.21.  $f_1, \dots, f_k \in K[x]$  は  $K$  上既約であるとし,  $v_1, \dots, v_k \in K^n$  の最小消去多項式は  $f_1^{m_1}, \dots, f_k^{m_k}$  であるとする. ただし,  $m_1, \dots, m_k$  は正整数とする. また,  $i \neq j$  ならば  $f_i$  と  $f_j$  は互いに素であるとする. ここで  $u = v_1 + \dots + v_k$  と置く.

1)  $f_1^{m_1} \dots f_k^{m_k}(A)u = 0$  が成り立つことを示せ.

2)  $u$  の最小消去多項式は  $f_1^{m_1} \dots f_k^{m_k}$  であることを示せ.

ヒント:  $u$  の最小消去多項式は 1) により  $f_1^{m_1} \dots f_k^{m_k}$  の形をしている. 例えば  $f_1^{m_1-1} f_2^{m_2} \dots f_k^{m_k}$  が消去多項式であるか考える.  $g_j = f_1^{m_1} \dots f_{j-1}^{m_{j-1}} f_{j+1}^{m_{j+1}} \dots + f_k^{m_k}$  と置くと, 命題 11.1.13 により,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K[x]$  が存在して  $\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_k g_k = 1$  が成り立つ. すると  $v_1 = \alpha_1(A)g_1(A)v_1$  が成り立つ.  $v_1$  の最小消去多項式は  $f_1^{m_1}$  であるから,  $f_1^{m_1-1}(A)\alpha_1(A)g_1(A)v_1 = f_1^{m_1-1}(A)v_1 \neq 0$  が成り立つ. 特に  $(f_1^{m_1-1} f_2^{m_2} \dots f_k^{m_k})(A)u = (f_1^{m_1-1} f_2^{m_2} \dots f_k^{m_k})(A)v_1 = (f_1^{m_1-1} g_1)(A)v_1 \neq 0$  が成り立つので,  $f_1^{m_1-1} f_2^{m_2} \dots f_k^{m_k}$  は  $u$  の消去多項式ではない.

問 11.4.22. 1) 定理 11.4.6 のうち,  $A$  を有理標準形に変形できるという主張を示せ.

2) 定理 11.4.6 における有理標準形の一意性を示せ.

ヒント: 例えば次の方針で示せる. 所々証明を端折るので補うこと. なお, 単因子についても調べると良い.

$A \in M_n(K)$  とし,  $P \in GL_n(K)$  について  $C = P^{-1}AP$  は有理標準形であるとする. 即ち, コンパニオン行列  $C_1, \dots, C_s$  で, 定理 11.4.6 の条件を満たすものが存在して  $C = C_1 \oplus \dots \oplus C_s$  が成り立つとする. すると, 定理 11.4.6 の条件 1) により, どの二つも互いに素であるような既約多項式  $f_1, \dots, f_a$  と, 正整数  $b_1 < \dots < b_s = a$ , 正整数の組  $(m(1)_1, \dots, m(1)_{b_1}), \dots, (m(s)_1, \dots, m(s)_{b_s})$  であって,  $1 \leq k \leq s$  について,  $i < j$  ならば  $m(i)_k \leq m(j)_k$  なるものが存在して (定義されていない  $m(i)_k$  は 0 とみなす),

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1^{m(1)_1} \dots f_{b_1}^{m(1)_{b_1}}, \\ e_2 &= f_1^{m(2)_1} \dots f_{b_1}^{m(2)_{b_1}} \dots f_{b_2}^{m(2)_{b_2}}, \\ &\vdots \\ e_s &= f_1^{m(s)_1} \dots f_a^{m(s)_a} \end{aligned}$$

が成り立つ ( $e_s$  は  $A$  の最小多項式であることに注意). 問 11.4.21 により  $W(e_k) = W(f_1^{m(k)_1}) \oplus \dots \oplus W(f_{b_k}^{m(k)_{b_k}})$  が成り立つから,  $K^n$  の直和分解

$$K^n = W_1 \oplus \dots \oplus W_a$$

であって、条件

- a) 各  $k$  について、 $f_k^{m(s)_k}$  は  $W_k$  の任意の元の消去多項式である。
- b) また、 $f_k^{m(s)_k}$  を最小消去多項式とする  $W_k$  の元が存在する。

を満たすものが得られる。 $F_k: W_k \rightarrow W_k$  を  $F_k(v) = Av$  により定めれば、条件 b) により  $f_k^{m(s)_k}$  は  $W_k$  の最小多項式である。また、 $W_k = W(f_k^{m(s)_k})$  が成り立つ。ここまでの議論により、 $A$  の有理標準形が一つ与えられると

- i)  $K^n$  の、 $\{0\}$  でない  $A$ -不変な部分線型空間への直和分解  $K^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_a$ ,
- ii)  $W_j = W(f_j^{m(s)_j})$  が成り立つような、 $A$  の最小多項式の既約分解  $f_1^{m(s)_1} \cdots f_a^{m(s)_a}$ ,
- iii)  $A$ -不変部分空間の増大列  $\{0\} = U^{(j)}(0) \subset U^{(j)}(1) \subset \cdots \subset U^{(j)}(m(s)_j) = W_j$  であって、 $A$  を左から掛けることにより自然に定まる  $U^{(j)}(l)$  の最小多項式は  $f_j^l$  に等しいもの

が一意的に定まる。逆に、これらが定めれば有理標準形が一意的に定まる。一方、 $A$  が定めれば上の条件 i), ii), iii) を満たすような  $K^n$  の直和分解が問 11.4.19 のようにして与えられるが、問 11.1.26 によりこの分解は一意的である。従って  $A$  の有理標準形は一意的である。

例 11.4.23.  $A = \begin{pmatrix} 4 & -18 & -1 & 13 & 25 & 32 \\ -8 & 33 & -11 & 41 & 37 & 9 \\ 13 & -55 & 15 & -54 & -43 & 0 \\ -6 & 24 & -2 & 8 & 1 & -13 \\ 24 & -99 & 22 & -79 & -57 & 15 \\ -21 & 87 & -22 & 78 & 60 & -6 \end{pmatrix}$  の有理標準形を求めてみる。 $A$  の固有

多項式、最小多項式はそれぞれ  $(x^2+x+1)^3$ ,  $(x^2+x+1)^2$  である<sup>†24</sup>。 $F: K^6 \rightarrow K^6$  を  $F(v) = Av$  により定める。ここで  $K$  は  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  のいずれと考えてもよい。

$$A^2 + A + E_6 = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -2 & 6 & 10 & 12 \\ 6 & -24 & 3 & -9 & 3 & 18 \\ -8 & 32 & -5 & 15 & -1 & -22 \\ 1 & -4 & 2 & -6 & -4 & 0 \\ -11 & 44 & -9 & 27 & 5 & -26 \\ 11 & -44 & 8 & -24 & -2 & 28 \end{pmatrix}$$

<sup>†24</sup>手計算でも計算可能ではあるが、計算機等を用いるのが簡便である。ただし、計算方法についてはなるべく多くのものをそれぞれ正しく理解しておく必要がある。

であって,  $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \\ 1 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}, v_1^{(1)} = v = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -13 \\ 3 \\ -20 \\ 19 \end{pmatrix}$  とすると,  $\text{Im}(F^2 + F + \text{id}_{K^6}) = \langle u, v \rangle$  が成り立

つ. また,

$$C(v_1^{(1)}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -13 \\ 3 \\ -20 \\ 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 8 \\ -1 \\ 11 \\ -11 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad A^2 v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ -2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix} = -A v_1^{(1)} - v_1^{(1)}$$

が成り立つ. ここで  $u_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  と置くと  $(A^2 + A + E_6)u_1^{(1)} = v_1^{(1)}$  であって,

$$C(u_1^{(1)}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -19 \\ 28 \\ -8 \\ 46 \\ -43 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 28 \\ -42 \\ 11 \\ -66 \\ 62 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -15 \\ 22 \\ -4 \\ 31 \\ -30 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ -15 \\ 22 \\ -4 \\ 31 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ 25 \\ -9 \\ 44 \\ -40 \end{pmatrix} = -2A^3 u_1^{(1)} - 3A^2 u_1^{(1)} - 2A u_1^{(1)} - u_1^{(1)}$$

が成り立つ. 一方,

$$\text{Ker}(F^2 + F + \text{id}_{K^6}) = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\text{Ker}(F^2 + F + \text{id}_{K^6}) \cap C(u_1^{(1)}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -13 \\ 3 \\ -20 \\ 19 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \\ 1 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

であるから, 例えば  $u_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(F^2 + F + \text{id}_{K^6}) \setminus U_1$  とすると

$$C(u_1^{(2)}) = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = -Au_1^{(2)} - u_1^{(2)}$$

が成り立つ.  $P = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -19 & 28 & -15 \\ 0 & -3 & 1 & 28 & -42 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 11 & -4 \\ 0 & -3 & 0 & 46 & -66 & 31 \\ 0 & 3 & 0 & -43 & 62 & -30 \end{pmatrix}$  と置くと  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & -4 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -3 & 12 & 4 & -12 & -19 & -21 \\ -5 & 20 & 5 & -16 & -29 & -34 \\ -4 & 16 & 4 & -13 & -24 & -28 \\ -1 & 4 & 1 & -4 & -8 & -9 \end{pmatrix}$

であって,  $P^{-1}AP = C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  が成り立つ.

$K$  が  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  のいずれでもない場合について簡単な例をいくつか挙げておく.

**定義 11.4.24.**  $p$  を素数とする.  $n \in \mathbb{Z}$  について,  $n = mp + q$ ,  $0 \leq q < p$  と表して  $[n] = q$  と定める. ここで

$$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{[n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

と置き,  $[n] + [m] = [n + m]$ ,  $[n][m] = [nm]$  と定める.

$\mathbb{F}_p$  は (可換) 体である<sup>†25</sup>. 少なくとも有理標準形を考えるのであれば  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  と同様に扱って良い<sup>†26</sup>.

<sup>†25</sup> $\mathbb{F}_p$  は剰余類を用いて定めた方が見通しが良い.

<sup>†26</sup>講義で扱ったことや, この資料にあることの多くのことはそのまま成り立つ. 例えば固有値が  $\mathbb{F}_p$  に属すると仮定すれば対角化や Jordan 標準形を考えることもできる. 一方, 微積分のようなことをしようとすると大分難しくなる.

例 11.4.25.  $p = 2$  とし,  $\mathbb{F}_2$  の元  $[n]$  を単に  $n$  で表す. さて  $M_6(\mathbb{F}_2)$  の元

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -18 & -1 & 13 & 25 & 32 \\ -8 & 33 & -11 & 41 & 37 & 9 \\ 13 & -55 & 15 & -54 & -43 & 0 \\ -6 & 24 & -2 & 8 & 1 & -13 \\ 24 & -99 & 22 & -79 & -57 & 15 \\ -21 & 87 & -22 & 78 & 60 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の有理標準形を求めてみる.  $x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$  は  $\mathbb{F}_2$  上既約である. また,  $A$  の固有多項式, 最小多項式はそれぞれ  $(x^2 + x + 1)^3$ ,  $(x^2 + x + 1)^2$  である (係数は 2 で割った余りであることに注意せよ). また,

$$A^2 + A + E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. この例の場合には, 例 11.4.23 に現れる行列の成分を全て 2 で割った余りに置き

換えると, 全く同様に有理標準形を求めることができる.  $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  とおくと,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ であって, } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ が成り立ち, これが } A$$

の有理標準形である.

例 11.4.26.  $p = 3$  とし,  $\mathbb{F}_3$  の元  $[n]$  を単に  $n$  で表す. さて  $M_6(\mathbb{F}_3)$  の元

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -18 & -1 & 13 & 25 & 32 \\ -8 & 33 & -11 & 41 & 37 & 9 \\ 13 & -55 & 15 & -54 & -43 & 0 \\ -6 & 24 & -2 & 8 & 1 & -13 \\ 24 & -99 & 22 & -79 & -57 & 15 \\ -21 & 87 & -22 & 78 & 60 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の有理標準形を求めてみる.  $A$  の固有多項式, 最小多項式はそれぞれ  $(x^2 + x + 1)^3$ ,  $(x^2 + x + 1)^2$  である. しかし,  $x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$  は  $\mathbb{F}_3$  上既約でない. 実際  $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = x^2 + x + 1$  が  $\mathbb{F}_3[x]$  において成り立つ. 従って  $A$  の固有多項式, 最小多項式はそれぞれ  $(x-1)^6$ ,  $(x-1)^4$  と考えた

方が良い．さて， $A - E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  であって， $(A - E_6)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，

$(A - E_6)^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  が成り立つ．従って， $F: \mathbb{F}_3^6 \rightarrow \mathbb{F}_3^6$  を  $F(v) = Av$  により

定めると  $\text{Im}(F - \text{id}_{\mathbb{F}_3^6})^3 = \langle v_1^{(1)} \rangle$ ，但し  $v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  が成り立つ． $v_1^{(1)} \in \text{Ker}(F - \text{id}_{\mathbb{F}_3^6})$  で

あるから， $Av_1^{(1)} = v_1^{(1)}$  であって， $C(v_1^{(1)}) = \langle v_1^{(1)} \rangle$  が成り立つ．ここで  $u_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  とすると

$(A - E_6)^3 u_1^{(1)} = v_1^{(1)}$  であって， $\text{Im}(F - \text{id}_{\mathbb{F}_3^6})^2 = C((A - E_6)^2 u_1^{(1)})$  が成り立つ．また， $u_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

とすると  $(A - E_6)^2 u_1^{(2)} = o$  であって， $\text{Im}(F - \text{id}_{\mathbb{F}_3^6}) = C((A - E_6)u_1^{(1)}) \oplus C((A - E_6)u_1^{(2)})$  が成り立

つ．最後に， $\mathbb{F}_3^6 = C(u_1^{(1)}) \oplus C(u_1^{(2)})$  を得る． $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  と置くと， $P \in \text{GL}_6(\mathbb{F}_3)$

であって， $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  が成り立つ．また， $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  が成

り立つ．これが  $A$  の有理標準形である．ここで， $(x-1)^2 = x^2 - 2x - 2$ ， $(x-1)^4 = x^4 - x^3 - x - 2$  が  $\mathbb{F}_3[x]$  において成り立つことに注意せよ．

例 11.4.23, 11.4.25 は  $K$  は異なったが同様の計算で有理標準形が求まった．例 11.4.26 は最小多項式の既約分解が異なるなど，少し差違があるが，結果としては有理標準形は例 11.4.23 のものを  $M_6(\mathbb{F}_3)$  の元と考えれば良かった．しかし，全く事情が異なる場合もある．

例 11.4.27.  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$  とする ( $\mathbb{R}$  は  $\mathbb{Q}$  でも構わない)． $A$  の固有多項式，

最小多項式は共に  $(x-1)^2(x^2+2x+2)$  である．また， $A$  の有理標準形は  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  であ

る (例えば  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  とすれば  $P^{-1}AP$  は有理標準形である)．ここで  $A \in M_4(\mathbb{F}_5)$

とみなし， $B$  で表す． $\mathbb{F}_5[x]$  の元として  $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$  が成り立ち， $B$  の固有多項式は  $(x-1)^3(x+3)$  と既約分解される．また， $B$  の最小多項式は  $(x-1)^2(x+3)$

である． $B$  の有理標準形は  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  である (例えば  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  と

すれば  $Q^{-1}BQ$  は有理標準形である)．このように，見かけ上同じ行列であっても  $K$  が変わると最小多項式や有理標準形が大きく変わることがある．

例 11.4.28. 例 11.4.26 では最小多項式の，既約成分に関する既約分解が変わることで最小多項式が変わった．最小多項式が変化する，もっと単純な例もある． $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  とする ( $\mathbb{R}$  は  $\mathbb{Q}$  あるいは  $\mathbb{C}$  でも構わない)． $A$  の固有多項式，最小多項式は共に  $(x-1)^2$  であって， $A$  の有理標準形は  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  で与えられる． $A$  を  $M_2(\mathbb{F}_2)$  の元とみなすと， $A$  は単位行列に等しい．固有多項式は  $(x-1)^2$ ，最小多項式は  $x-1$  であって，有理標準形は  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  で与えられる．

また，次の点にも注意が必要である． $K = \mathbb{R}$  や  $K = \mathbb{C}$  の場合には  $A$  に (成分が)「近い」行列を考えることができる<sup>††27</sup>． $A \in M_n(\mathbb{R})$  に十分近い行列の有理標準形は  $A$  のそれに近い，としたいところであるが，そうはいかない．例えば  $A_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする． $\epsilon \neq 0$  であれば  $A_\epsilon$  の

<sup>††27</sup> $K$  に距離が入れば良いので， $K = \mathbb{Q}$  であっても考えることはできるし，同様に「近い」行列を考えることができる  $K$  はほかにもいろいろある (ただし，日常的な感覚に近い意味を持つ距離を入れることができるためには  $K$  に一定の条件が付く．例えば， $a, b \in K$  の距離を  $d(a, b)$  で表すことにする． $K = \mathbb{R}$  とすると， $\mathbb{R}$  の (ユークリッド) 距離については  $\forall a, b \in K, \exists c \in K, 0 < d(a, c) < d(a, b)$  が成り立つ ( $a$  と  $b$  の間に  $K$  の元が存在する)．しかし  $K = \mathbb{F}_p$  とするとこれが成り立つような距離は存在しない．

最小多項式は  $(x-1)^2$  であって、有理標準形は  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  である。  $\epsilon = 0$  であれば  $A_0$  の最小多項式は  $x-1$  であって、有理標準形は  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  である。

対角化や Jordan 標準形についても同様な問題がある（問 8.8 も参照のこと）。このようなことは理論的にはもちろん、実際的に行列を用いる場合にも問題になる。例えば何らかの観測量を行列として扱うことを考える。多くの場合、成分として現れる現実のデータは真のもの（それが存在するとして）ではあり得ず、どこかで近似して得られるものである（近似が測定時点か、測定後のものなのかは場合による）。対角化などの標準形に関わる問題の場合、この誤差を何らかの意味で制禦しないと話しが大幅に変わってしまい、本来の状況とかけ離れてしまう可能性があることを上の例は表している。また、整数（ $\mathbb{Z}$  の元）を扱う際に、 $\mathbb{F}_p$  を考えて議論を有限の範囲に帰着させるという技法があり、理論的には数論など、実際的には情報（工）学などに関連して現れる有限的な数学に多く見られる。このような場合でも、標準形に関わることを扱う際には似たような種類の注意が必要である。

（以上）