２０１４年度数学 II（理 I 16,21,22 組向け，足助担当）　演習問題 １０　　　’14/12/22（月）

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．

問 10.1. $A \in \mathrm{SO}_2$ とする．ある $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．この θ を A の表す $\mathbb{R}^2$ の線型変換の**回転角**などと呼ぶ．幾何学的には SO_2 の元は θ 回転を表す．

問 10.2. $A \in \mathrm{SO}_3$ とする．

1) ある $P \in \mathrm{SO}_3$ が存在して
$$P^{-1}AP = (1) \oplus \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
が成り立つことを示せ．

2) $P = (p_1\ p_2\ p_3)$ と列ベクトルを用いて表す．$V = \mathbb{R}p_1$ と置くと，V は A-不変であって，さらに
$$\forall v \in V,\ Av = v \tag{10.3}$$
が成り立つことを示せ．また，$A \neq E_3$ であれば，性質 (10.3) が成り立つような V は一意的であることを示せ．この V を A により定まる $\mathbb{R}^3$ の線型変換の**回転軸**などと呼ぶ．

3) $A \in \mathrm{SO}_3$ とし，$A \neq E_3$ とする．f を A により定まる $\mathbb{R}^3$ の線型変換とし，V を f の回転軸とする．W を V の直交補空間とすると W は f-不変（A-不変）であることを示せ．また，V の正規直交基底 $\{v\}$ を一つ固定し，W の順序付き正規直交基底 (w_1, w_2) を $\det(v\ w_1\ w_2) = 1$ が成り立つように定める．すると，f の W への制限の，(w_1, w_2) に関する表現行列は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と表すことができて，θ は $2\pi\mathbb{Z}$ の任意性を除いて (w_1, w_2) の取り方に依らず定まることを示せ．この θ を f の（V に関する）**回転角**などと呼ぶ．

4) 3) における f の回転角を θ とする．v を $-v$ に置き換えると回転角は $-\theta$ となることを示せ．従って f の回転角は v の選び方に依存する．また，なぜこのようなことが起きるのか，幾何的（図形的）に考察せよ．

問 10.4. f を $\mathbb{R}^n$ 上の対称双一次形式あるいは $\mathbb{C}^n$ 上のエルミート形式とする．

1) f が正値であるならば，任意の部分線型空間 $V \subset K^n$ について f の V への制限は正値であることを示せ．

2) f は非退化であるが，f の V への制限は非退化ではないような f, V の例を一つ挙げよ．

以下しばらく（問 10.8 まで）線型代数とは一見関わりがない事柄について扱う．これらは取り立てて試験範囲には入れないが，極めて基本的な事柄であるので，例えば三角函数について特に述べずとも既知とするように，既知のこととして扱う．

問 10.5. いくつかの，$\mathbb{R}$ 上の実数値函数を次のように定める．

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$
$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

これらの函数を順に**双曲（線）正弦函数**，**双曲（線）余弦函数**，**双曲（線）正接函数**，**双曲（線）余接函数**と呼ぶ．定義される範囲で $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}$ が成り立つ．また，これらを総称して**双曲（線）函数**と呼ぶ．さらに，

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh x},$$
$$\operatorname{cosech} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\sinh x}$$

と定め，**双曲（線）正割函数**，**双曲（線）余割函数**と呼ぶ．$\operatorname{cosech} x$ は $\operatorname{csch} x$ で表すことも多い．

三角函数と同様に，$n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ の時 $\sinh^n$ などを定める．

問 10.6. 1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つことを示せ．

2) （加法公式）

$$\sinh(x+y) = (\sinh x)(\cosh y) + (\cosh x)(\sinh y),$$
$$\cosh(x+y) = (\cosh x)(\cosh y) + (\sinh x)(\sinh y)$$

が成り立つことを示せ．また，$\tanh, \coth$ に関する加法公式を求めよ．

3) x が実数全体を動くときの $\sinh x, \cosh x, \tanh x, \coth x$ のグラフを描け．

4) x が実数全体を動くときの $(\cosh x, \sinh x) \in \mathbb{R}^2$ の描く軌跡を図示せよ．

問 10.7. $\dfrac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$, $\dfrac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$ がそれぞれ成り立つことを示せ．

問 10.8. 三角函数が現れる積分の公式について，双曲線函数における類似について考察せよ．特に，$\dfrac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x$ が成り立つことを示せ．また，$\operatorname{arctanh}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ を $\tanh$ の逆函数とするとき $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arctanh} x$ を求めよ．

問 10.9. $A \in \mathrm{SO}_{1,1} = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^tA \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \det A = 1 \right\}$ とする（$\mathrm{SO}_{1,n}$ も同様に定義され，**特殊ローレンツ群**と呼ばれる）．このときある $x \in \mathbb{R}$ について $A = \begin{pmatrix} \pm\cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \pm\cosh x \end{pmatrix}$，ただし複号同順，が成り立つことを示せ．$A \in \mathrm{O}_{1,1}$ かつ $\det A = -1$ である時にはどうか．

（以上）