以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 9.1. $m \leq n$ とし，$A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,m}(K)$ とする.

1) α を AB の固有値，v を α に属する AB の固有ベクトルとする．α は BA の固有値であって Bv は α に属する AB の固有ベクトルであるか，あるいは $Bv = o$ が成り立つことを示せ．同様に，β を BA の固有値，w を β に属する BA の固有ベクトルとすると，β は AB の固有値であって Aw は β に属する BA の固有ベクトルであるか，あるいは $Aw = o$ が成り立つことを示せ.
2) 1) において $\alpha \neq 0$ とすると，$Bv \neq o$ が成り立つことを示せ．同様に，$\beta \neq 0$ とすると $Aw \neq o$ が成り立つことを示せ.
   ヒント：ABv を考えてみよ.
3) AB, BA は共に K-上対角化可能であるとする．f, g をそれぞれ AB, BA の固有多項式とすると，$g(x) = x^{n-m}f(x)$ が成り立つことを示せ.
4) （やや難しい）一般に，f, g をそれぞれ AB, BA の固有多項式とすると $g(x) = x^{n-m}f(x)$ が成り立つことを示せ.
   ヒント：広義固有空間（一般固有空間）について 1), 2) と同様のことが成り立つことを示すことができる．なお，広義固有空間は Jordan 標準形と関連が深い．これに関しては来週以降問題を配布する.

対角化可能な正方行列は射影に重みをつけて足し上げたものと考えることができる.

問 9.2. $A \in M_n(\mathbb{C})$ を（$\mathbb{C}$ 上）対角化可能な行列とし，$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ について $D = P^{-1}AP$ は対角行列であって，さらに $D = \alpha_1 E_{p_1} \oplus \cdots \oplus \alpha_r E_{p_r}$ が成り立つとする．ここで $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ は相異なる A の固有値全体であって，p_i は α_i の重複度とする．そして

$$P_i = P(O_{p_1} \oplus \cdots \oplus O_{p_{i-1}} \oplus E_{p_i} \oplus O_{p_{i+1}} \oplus \cdots \oplus O_{p_r})P^{-1}$$

と置く.

1) $P_1, \ldots, P_r$ は次の条件を満たすことを示せ.
   a) $P_1 + \cdots + P_r = E_n$.
   b) $P_iP_j = \begin{cases} P_i, & i = j, \\ O_n, & i \neq j \end{cases}$.
   c) $A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_r P_r$.

   このような分解を A の**スペクトル分解**と呼ぶ．また，条件 $P^2 = P$ を満たす行列を**射影行列**，$f \circ f = f$ を満たす線型変換を**射影変換**（状況によっては単に射影）と呼ぶ.
2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ であって，全ての固有値が実数であれば $P_1, \ldots, P_r$ は実行列にとれることを示せ.
3) $f_i \colon K^n \to K^n$ を $f_i(v) = P_i v$ により定める．f_i の像 $\operatorname{Im} f_i$ は α_i に属する A の固有空間であることを示せ.
4) A のスペクトル分解は P_i 達の並べ替えを除いて一意的であることを示せ.

問 9.3. $n > 1$ とし，$\Delta(x_1, \ldots, x_r) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (x_j - x_i)$ と置く（これを $x_1, \ldots, x_r$ の**差積**と呼ぶ）．$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ を相異なる K の元とし，

$$f_k(x) = \frac{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, x, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_r)}{\Delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)}$$

と置く．

1) f_k は $(r-1)$ 次多項式であって，$f_k(\alpha_j) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k \end{cases}$ が成り立つことを示せ．
2) $f_1 + \cdots + f_r = 1$ が成り立つことを示せ．
3) $1 \leq l \leq r-1$ の時，$\alpha_1^l f_1(x) + \cdots + \alpha_r^l f_r(x) = x^l$ が成り立つことを示せ（任意の $a \in K$ について $a^0 = 1$ と定め，また，$x^0 = 1$ と定めれば 2) が得られる）．

2), 3) のヒント：例えば直接計算して示すことも可能である．この際には左辺をうまく $(r+1)$ 次行列の行列式に書き直すと計算がかなり楽になる．あるいは，次の問 9.4 を用いることもできる．

問 9.4. f を K の元を係数とする $(r-1)$ 次多項式とする．r 個の相異なる K の元 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ について $f(\alpha_1) = \cdots = f(\alpha_r) = 0$ が成り立てば $f = 0$ が成り立つことを示せ．

問 9.5. $A \in M_n(\mathbb{C})$ を対角化可能な行列とし，$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ を A の相異なる固有値全体とする．$r = 1$ であれば $Q_1 = E_n$，$r > 1$ であれば $f_1, \ldots, f_r$ を問 9.3 のように定め，$Q_i = f_k(A)$ と置く．$A = \alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_r Q_r$ が成り立ち，A のスペクトル分解となることを示せ．

問 9.6. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．A がスペクトル分解可能であるとすると，A は $\mathbb{C}$ 上対角化可能であることを示せ．また，$A \in M_n(\mathbb{R})$ であって，A が実行列の範囲でスペクトル分解可能であるならば，A は $\mathbb{R}$ 上対角化可能であることを示せ．
ヒント：（積が）可換な行列の同時対角化について調べてみよ．また，特に $r = 1$ の場合を考えればわかるように，まず射影行列が対角化可能であることを示す必要がある．

問 9.7. 次の行列のスペクトル分解が存在するのであればそれを求めよ．

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$，ただし $t \in \mathbb{R}$　　3) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

定理 9.8. V を計量線型空間とし，f を V の正規変換とする．

1) f がエルミート変換であることと，f の固有値が全て実数であることは同値であることを示せ．特に V が実計量線型空間であって f が実対称変換であれば f の固有値は全て実数である．
2) f が歪エルミート変換であることと f の固有値が全て純虚数であることは同値であることを示せ．
3) f がユニタリ変換であることと f の固有値の大きさが全て 1 であることは同値であることを示せ．

定義 9.9. A をエルミート行列（実対称行列）とする．A が**正値（半正値，負値）**であるとは A の固有値が全て**正（非負，負）**であることを言う．また，A が**非退化**であるとは A が 0 を固有値として持たないことを言う．エルミート変換・実対称変換に関しても同様に定める．

問 9.10. A を半正値エルミート（実対称）行列とすると，$B^2 = A$ なる半正値エルミート（実対称）行列がただ一つ存在することを示せ．この B を $\sqrt{A}$ で表す．

同様に，f を半正値エルミート（実対称）変換とすると，$g \circ g = f$ なる半正値エルミート（実対称）変換がただ一つ存在する．この g を $\sqrt{f}$ で表す．

問 9.11. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．A^*A, AA^* はそれぞれ半正値エルミート行列（$K = \mathbb{C}$ の時）あるいは半正値対称行列（$K = \mathbb{C}$ の時）であることを示せ．

問 9.12.
1) A を半正値エルミート行列とする．
   a) $v, w \in \mathbb{C}^n$ について $g(v, w) = v^*Aw$ と置く（$g\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ を $g(v, w) = v^*Aw$ により定める）と，$\forall\, v, w \in \mathbb{C}^n,\ g(v, w) = \overline{g(w, v)}$，$\forall\, v \in \mathbb{C}^n,\ g(v, v) \geq 0$ がそれぞれ成り立つことを示せ．
   b) 条件
      i) A は正値エルミート行列である．
      ii) $g(v, v) = 0$ が成り立つならば $v = o$ が成り立つ．

      は同値であることを示せ．
2) A を半正値対称行列とする．$\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{R}^n$ で置き換え，$g(v, w) = {}^t vAw$ とすると 1) と同様のことが成り立つことを示せ．
3) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を K^n の標準計量とする．$\mathscr{V}$ を K^n の順序付き基底とし，G を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ の $\mathscr{V}$ に関する表現行列とすると G は正値エルミート行列あるいは正値対称行列であることを示せ．
   ※ 逆は必ずしも成り立たない（もっと強い条件が要る）．このことについては時間が許せば講義で述べる．
4) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を K^n の Lorentz 計量とする．$\mathscr{V}$ を K^n の順序付き基底とし，G を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ の $\mathscr{V}$ に関する表現行列とすると G は非退化なエルミート行列あるいは対称行列であるが，正値でも負値でもないことを示せ．このように，非退化なエルミート行列あるいは対称行列で，正値でも負値でもないものを**不定値**であると言う†1.

問 9.13.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{O}_n &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, {}^tAA = A\,{}^tA = E_n\},\\
\mathrm{U}_n &= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \,|\, A^*A = AA^* = E_n\},\\
\mathrm{O}_{1,n} &= \left\{A \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, {}^tA \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\right\},\\
\mathrm{U}_{1,n} &= \left\{A \in M_{n+1}(\mathbb{C}) \,\middle|\, A^* \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}
$$

と定め，順に**直交群**，**ユニタリ群**，**ローレンツ群**，**複素ローレンツ群**と呼ぶ．

†1 正値あるいは負値であることを**正定値**あるいは**負定値**であるとも言う．負定値と不定値は大変紛らわしいので注意を要する．

1) O_n，U_n，$\mathrm{O}_{1,n}$，$\mathrm{U}_{1,n}$ の元はそれぞれ正則であることを示せ．また，$A \in \mathrm{O}_n$ ならば $\det A = \pm 1$ が成り立ち，いずれの場合も実際に起きうることを例を挙げることにより示せ．ユニタリ群などについても同様の条件を求め，いずれの場合も実際に起きうることを示せ．

2) 三条件 i) $E_n \in \mathrm{O}_n$，ii) $A, B \in \mathrm{O}_n$ ならば $AB \in \mathrm{O}_n$，iii) $A \in \mathrm{O}_n$ ならば $A^{-1} \in \mathrm{O}_n$ が成り立つことを示せ．また，ユニタリ群などについても同様のことが成り立つことを示せ．

3) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を K^n の標準計量とする．$A \in M_n(K)$ について $A \in \mathrm{U}_n$（$K = \mathbb{C}$）あるいは $A \in \mathrm{O}_n$（$K = \mathbb{R}$）が成り立つことと，$\forall v, w \in K^n$, $\langle Av \,|\, Aw\rangle = \langle v \,|\, w\rangle$ が成り立つことは同値であることを示せ.

4) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を K^{n+1} の Lorentz 計量とする．即ち，$v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ について

$$\langle v \,|\, w\rangle = -\overline{v_0}w_0 + \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i}w_i$$

と置く（$K = \mathbb{R}$ の時にも形式的に同じ式で定める）．このとき，$A \in M_{n+1}(K)$ について $A \in \mathrm{U}_{1,n}$（$K = \mathbb{C}$）あるいは $A \in \mathrm{O}_{1,n}$（$K = \mathbb{R}$）が成り立つことと，$\forall v, w \in K^n$, $\langle Av \,|\, Aw\rangle = \langle v \,|\, w\rangle$ が成り立つことは同値であることを示せ.

以下では $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ と ${}^t(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn}) \in K^{n^2}$ を同一視することにより $M_n(K)$ を K^{n^2} とみなす.

定義 9.14. $X \subset M_n(K) = K^{n^2}$ を部分集合とする.

1) $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}} \in X$ を X の点列とする．$\lim\limits_{m\to+\infty} A_m$ が存在して A に等しいならば $A \in X$ が成り立つとき，X は $M_n(K)$ の**閉集合**であるという.

2) $R \geq 0$ について，$B(R) = \{A \in M_n(K) = K^{n^2} \mid \|A\| \leq R\}$ と置く．ここで $\|\cdot\|$ は K^{n^2} の標準的なノルムである．$\exists R \geq 0,\ X \subset B(R)$ が成り立つとき X は**有界**であるという.

問 9.15 (問 9.13 の続き). 5) O_n，U_n，$\mathrm{O}_{1,n}$，$\mathrm{U}_{1,n}$ はそれぞれ K^{n^2} あるいは $K^{(n+1)^2}$ の閉集合であることを示せ.

6) O_n，U_n は有界であるが，$\mathrm{O}_{1,n}$，$\mathrm{U}_{1,n}$ は有界でない（非有界である）ことを示せ.
ヒント：有界性については，例えば行列を列ベクトルに分けて考えて，それぞれのベクトルの標準的なノルムを考えてみよ．閉集合であることを示すためには，例えば $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を $f(A) = {}^tAA - E_n$ により定める．$A \in \mathrm{O}_n$ が成り立つことと $f(A) = O_n$ が成り立つことは同値であることと，f が行列の成分（行列の成分を K^{n^2} の元の成分と同一視していることに注意せよ）に関する連続函数であることを示し，$\{A_m\}$ が収束するのであれば $f\left(\lim\limits_{m\to+\infty} A_m\right) = O_n$ が成り立つことを示せ．ユニタリ群などについても同様である.

（以上）