２０１４年度数学 II（理 I 16,21,22 組向け，足助担当）　演習問題 ８　　　　'14/12/8（月）

'14/12/10：問 8.1 の 3)，問 8.5 の 5)，問 8.8 の 2),4),5) の誤植を修正．特に，2) と 5) に関しては量化子（$\forall, \exists$）の使い方が不適切であったので注意すること．また，問 8.8 の 3) の表現を変更．ほかにも細かい字句を修正した．
'15/1/16：問 8.1 のコメントの誤植を修正．
'14/12/10（再）：問 8.5 の 2) と 5) を再修正．量化子の使い方について，元の方がより適切であったので戻した．また，問 8.1 にコメントと問，番号をつけずに問 8.1 の後に追加．
'14/12/14：問の 6), 7) の誤植を修正．ノルムの定義をより正確にした．

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．

対角化に関しては 10 月 6 日配布の第２回演習問題（番号は 1.$*$ となっているので注意）も参照のこと．

問 8.1. $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$ について

$$\|v\|_1 = |v_1| + \cdots + |v_n|$$

と置く．また，$\|v\|$ で v の標準的なノルム（標準計量から定まるノルム）を表す．

1) 正の実数 C が存在して

$$\forall\, v \in K^n,\ \frac{1}{C}\,\|v\|_1 \leq \|v\| \leq C\,\|v\|_1$$

が成り立つことを示せ．また，このような C の最小値を求めよ．

2) $\|\cdot\| : K^n \to \mathbb{R}$ は条件

a) $\forall\, v \in K^n,\ \|v\| \geq 0$．また，$\|v\| = 0$ が成り立つのは $v = o$ の時，その時のみである．

b) $\forall\, v, w \in K^n,\ \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

c) $\forall\, v \in K^n, \lambda \in K,\ \|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$.

を満たすことを示せ．また，$\|\cdot\|_2$ も同様の条件を満たすことを示せ．

3) K^n の計量 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ であって，

$$\forall\, v \in K^n,\ \|v\|^2 = \langle v \,|\, v \rangle$$

を満たす物は存在しないことを示せ．

ヒント：存在するのであればノルムは計量（内積）で表せるのであった．

定義. 問 8.1 の 2) にある三条件を満たす K^n から $\mathbb{R}$ への写像を K^n 上の**ノルム**と呼ぶ．一般の線型空間 V についても，K^n を V に置き換えることで V 上のノルムが定義される．また，V 上の二つのノルムについて問 8.1 の 1) にある関係が成り立つとき，それらのノルムは**同値**であると言う．

問 (この問は 7) まではやや，8) は完全に講義の範囲からは逸脱する).

以下の問に答えよ．特に K^n 上のノルムは全て同値である（小問 4)）ことを以下の順序で示せ．

1) $\|\cdot\|$ を K^n の標準的なノルムとし，$S^m = \{v \in K^n \mid \|v\|^2 = 1\}$ と置く（$K = \mathbb{R}$ の時には $m = n-1$，$K = \mathbb{C}$ の時には $m = 2n-1$ とする）．S^m から $\mathbb{R}$ への連続写像（連続な函数）は最大値と最小値を S^m 上で取ることを示せ.

2) $a\colon K^n \to \mathbb{R}$ を K^n 上のノルムとする．a は連続函数であることを示せ.
※ 証明に困難を感じれば $K = \mathbb{R}$ として良いが，連続函数の（いわゆる $\varepsilon - \delta$ 法を用いた）正確な定義を知らなければ調べて示すことを強く勧める[†1]．これは 3) についても同様である.

3) $a, b\colon K^n \to \mathbb{R}$ を K^n 上のノルムとする．$f\colon S^m \to \mathbb{R}$ を $f(v) = \dfrac{a(v)}{b(v)}$ により定めることができて，S^m 上の連続函数であることることを示せ.

4) K^n 上のノルムは全て同値であることを示せ.

5) $p > 0$ とする．$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$ について

$$\|v\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

と置き，K^n 上の ***p*-ノルム**と呼ぶ．標準的なノルムは 2-ノルムである．また，形式的に $p = \infty$ として

$$\|v\|_\infty = \sup_{1 \le i \le n} |v_i|$$

と置き，**sup-norm** と呼ぶ[†2]．$p > 0$ あるいは $p = \infty$ であれば $\|\cdot\|_p$ は K^n 上のノルムであることを示せ．また，$n = 1$ の時には p-ノルムはすべて同一であることを確かめよ.
※ 必要であれば Minkowski の不等式と Hölder の不等式について調べよ.

6) $\|\cdot\|_p$ を K^n 上の p-ノルムとする（$p > 0$ あるいは $p = \infty$）．正の実数 C であって，条件

$$\forall\, v \in K^n,\ \frac{1}{C}\|v\|_q \le \|v\|_p \le C\|v\|_q$$

が成り立つようなものの最小値を求めよ．ただし p, q は正の実数であるか，あるいは ∞ とする.

7) K^n 上のノルム $\|\cdot\|_p$，ただし $p > 0$ あるいは $p = \infty$，が，K^n 上のある計量 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ について

$$\forall\, v \in K^n,\ \|v\|_p = \sqrt{\langle v \mid v\rangle}$$

を満たすのは $p = 2$ の時，その時のみであることを示せ（$n = 1$ ならば全ての p-ノルムは 2-ノルムに等しいので，主張は成り立つと考えることにする）.

[†1] 直感的な「定義」における例えば「限りなく近づく」ことをどのように文字通り理解すれば良いか，全くわからないことはわかって欲しい.

[†2] カタカナで書けば「スープノルム」である．本当は「sup」は「supremum」の略なのであまり適切でないように思えるが，欧米人でもこのように呼んでいるように思う（言語圏によっては u や su の発音がカタカナとしても異なるが，それは無視している．実は p についても問題はある）.

※ この意味で 2-ノルムは特別なものである．

8) （難しい）$C_0(\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ は連続かつ $\exists M \geq 0,\ \forall x > M,\ f(x) = 0\}$ と置く．$p > 0$ あるいは $p = \infty$ のとき，$f \in C(\mathbb{R})$ について

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, & p > 0, \\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

と置く．$\|\cdot\|$ は $C_0(\mathbb{R})$ 上のノルムであることを示せ．

※ 5) において max ではなくわざわざ sup を用いていることから見て取れるように，p-ノルムは有限次元でない線型空間についても考え，見方によっては有限次元の場合以上に有用である．興味があれば例えば K^n 上の（Lebesgue 可測）函数全体の空間上の p-ノルムや，関連して $L^p(K^n)$ などについて調べてみよ．小問 8) が関連が深い．$p = 2$ の場合（この場合が極端に重要である）は物理などで既に現れているかもしれない．

問 8.2. 1) $A \in M_n(K)$，$P \in \mathrm{GL}_n(K')$ とする（$K \subset K'$）．A が K' 上対角化可能であれば $P^{-1}AP$ も K' 上対角化可能であることを示せ．

2) V を $\mathbb{C}$-線型空間，f を V の $\mathbb{C}$-線型変換とする．f が $\mathbb{C}$ 上対角化可能であるとすれば，定義により，V のある（$\mathbb{C}$ 上の）順序付き基底に関する f の表現行列は $\mathbb{C}$ 上対角化可能である．このとき，V の任意の（$\mathbb{C}$ 上の）順序付き基底に関する f の表現行列は $\mathbb{C}$ 上対角化可能であることを示せ．

3) V を $\mathbb{R}$-線型空間，g を V の $\mathbb{R}$-線型変換とする．

a) g が $\mathbb{R}$ 上対角化可能であるとする．定義により V のある（$\mathbb{R}$ 上の）順序付き基底に関する g の表現行列は $\mathbb{R}$ 上対角化可能である．このとき，V の任意の（$\mathbb{R}$ 上の）順序付き基底に関する g の表現行列は $\mathbb{R}$ 上対角化可能であることを示せ．

b) g が $\mathbb{C}$ 上対角化可能であるとする．定義により，V のある（$\mathbb{R}$ 上の）順序付き基底に関する g の表現行列は $\mathbb{C}$ 上対角化可能である．このとき，V の任意の（$\mathbb{R}$ 上の）順序付き基底に関する g の表現行列は $\mathbb{C}$ 上対角化可能であることを示せ．

問 8.3. 次の行列が $\mathbb{C}$ 上対角化可能であるならば対角化し，そうでないのであれば三角化せよ．

$$1)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$，ただし $t, s \in \mathbb{C}$

問 8.4. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．A の固有値を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とする．ただし，固有値の重複度が 2 以上の場合には，例えば $1, 1, 2, \ldots$ のように重複度の分だけ固有値を並べることにする．このとき

$$\operatorname{tr} A = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$
$$\det A = \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

がそれぞれ成り立つことを示せ．

ヒント：対角化可能であれば対角化してしまえば良い．対角化不可能な場合には三角化するか，あるいは行列を対角化可能なもので近似するのが簡単である．

問 8.5. V を複素計量線型空間[†3]とし，f を V の等長変換（計量を保つ線型変換）とする[†4]．

1) f の固有値の大きさ[†5]は 1 に等しいことを示せ．
2) λ, μ を f の相異なる固有値とし，v, w をそれぞれ λ, μ に属する f の固有ベクトルとする．このとき $\langle v \,|\, w \rangle = 0$ が成り立つことを示せ．
3) f の固有値は α のみであるとする．$v \in V$ を α に属する f の固有ベクトルとし，$W = \mathbb{C}v = \mathrm{Span}(v)$ と置く[†6]．
   a) $W^\perp$ は f-不変であることを示せ．
   b) g を f の $W^\perp$ への制限とする[†7]．g は $W^\perp$ の等長変換であることを示せ．
      注意：V の部分線型空間は自然に計量線型空間なのであった．
   c) f は対角化可能であること，より詳しく，対角化の際に順序付き正規直交基底を用いることができることを示せ．即ち，ある順序つき正規直交基底 $\mathscr{U} = (u_1, \dots, u_n)$ が存在して，$\mathscr{U}$ に関する f の表現行列は対角行列であることを示せ．
4) f は V のある順序付き正規直交基底により対角化可能であることを示せ．
5) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$A^*A = AA^* = E_n$ が成り立つならば，ある $U \in \mathrm{U}_n$（ユニタリ行列）が存在して $U^{-1}AU$ は対角行列であることを示せ．
   ※ この事実は，単に $A^*A = AA^*$（線型変換で言えば $f^* \circ f = f \circ f^*$）という仮定の下で成り立つ．これについては後日示す予定である．

問 8.6 ($\mathbb{R}^2$ の等長線型変換の分類)**.** $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ とし，A で表される $\mathbb{R}^2$ の線型変換を f とする．f は等長変換である[†8]．

1) $\mathbb{R}^2$ のある 1 次元部分線型空間 V で，A-不変なものが存在するとする．
   a) f の V への制限を g とすると $\forall v \in V,\ g(v) = v$ あるいは $\forall v \in V,\ g(v) = -v$ のいずれか一方（当然一方のみ）が成り立つことを示せ．
   b) $V^\perp$ は f-不変であることを示せ．従って $V^\perp$ についても a) と同様のことが成り立つ．
2) f は恒等写像であるか，原点に関する π 回転を表すか，あるいは，ある A-不変な 1 次元部分線型空間 V が存在して $v \in V$ について $f(v) = v$，$v \in V^\perp$ について $f(v) = -v$ が成り立つ，のいずれか一つ，また一つのみが成り立つことを示せ．最後の場合が成り立つ時，f は V に関する**反転**，**鏡映**あるいは**折り返し**と呼ぶ（いずれも reflection/reflexion）．

[†3] 実計量線型空間とした方が問題は一見易しいが，逆に難しくなる．
[†4] うるさく言えば $\dim V < +\infty$ とする．
[†5] 複素数の絶対値を大きさとも呼ぶ．もし知らなかったならば覚えておいた方が良い．
[†6] $\mathrm{Span}(v)$ は普段は $\langle v \rangle$ で表しているが，計量との混乱を避けるために記号を変えた．
[†7] つまり，f に $W^\perp$ の元しか代入しないことにしたものを g とする．
[†8] 問にはしないが示すこと．

3) $\mathbb{R}^2$ の 1 次元部分線型空間 V で，A-不変なものが存在しないとする．このとき A は回転を表す行列に相似である[†9]ことを示せ．また，逆も成り立つことを示せ．

4) 上で与えた分類のそれぞれの場合について，例を一つずつ挙げよ．

問 8.7 ($\mathbb{R}^3$ の等長線型変換の分類)**.** $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ とし，A で表される $\mathbb{R}^3$ の線型変換を f とする．

1) $\mathbb{R}^3$ のある 1 次元部分空間 V で，A-不変なものが存在することを示せ．
※ 従って，既に $\mathbb{R}^2$ の場合と状況が異なる．

2) $\det A < 0$ とする．$A' = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ と置くと $A' \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ であって，かつ $\det A' > 0$ が成り立つことを示せ．

定義． $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ と置き，**特殊直交群**と呼ぶ（が無理に覚える必要は無い）．

以下ではしばらく $\det A > 0$ とする．$n = 2$ の時には状況が単純だったのでいきなり分類を始めたが，一般にはこのように簡単な状況から考える必要がある．

3) $\mathbb{R}^3$ のある A-不変な 1 次元部分空間 V で，g を V への制限とすると $g = \mathrm{id}_V$ が成り立つものが存在することを示せ．

4) V を 3) のようなものとする．h を f の $V^\perp$ への制限とすると h は回転に共役であることを示せ．f は V **を軸とする回転**であるという．また，h の回転角[†10]を f の回転角と呼ぶ．

5) $\det A < 0$ とする．ある A-不変な 1 次元部分線型空間 V であって，$\forall v \in V,\ f(v) = -v$ が成り立つものが存在することを示せ．また，f の $V^\perp$ への制限は回転であることを示せ．

6) 上で与えた分類のそれぞれの場合について，例を一つずつ挙げよ．

問 8.8. $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ について $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ と定める．

1) $A \in M_{m,n}(K), B \in M_{n,l}(K)$ について $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ が成り立つことを示せ．
ヒント：Schwarz の不等式を用いることができる．

2) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．

$$\exists\, \delta > 0,\ \forall X \in M_n(K),\ \|X - A\| < \delta \Rightarrow X \in \mathrm{GL}_n(K)$$

が成り立つことを示せ．従って，直感的に言えば正則な行列に成分が近い行列は正則である[†11]．

3) $A \in M_n(K)$ とする．

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, X \in \mathrm{GL}_n(K),\ \|X - A\| < \epsilon$$

[†9] $A, B \in M_n(K)$ の時，ある $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ について，$B = P^{-1}AP$ が成り立つとき A と B は相似である，あるいは B は A に相似であると言うが，特に線型変換を意識している場合（そもそも実際には正方行列は線型変換に関連して現れることが多い）A と B は（P により）**共役**（conjugate）であるとも言う．また，P を conjugacy（これも共役と呼んでしまうので，日本語で書かない方が無難である）と呼ぶ．

[†10] 直感的には自明であると思われるので，正確な定義は省略する．

[†11] あくまで直感的な表現であって，正確に述べるのであれば「$\exists \cdots$」とする必要がある．以下同様．

が成り立つことを示せ．従って，任意の行列は正則な行列でいくらでも近似できる．

4) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists X \in M_n(\mathbb{C}),\ \|X - A\| < \epsilon,\ X \text{ の全ての固有値の重複度は } 1 \text{ である．}$$

が成り立つことを示せ．特に，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists X \in M_n(\mathbb{C}),\ \|X - A\| < \epsilon,\ X \text{ は } \mathbb{C}\text{-上対角化可能である．}$$

が成り立つ．従って，複素数の範囲では任意の行列は対角化可能な行列でいくらでも近似できる．実数の範囲でも類似のことが成り立つが，やや煩雑になるので省略する．

5) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とし，A の固有値の重複度は全て 1 であるとする．このとき

$$\exists \delta > 0,\ \forall X \in M_n(\mathbb{C}),\ \|X - A\| < \delta \Rightarrow X \text{ の固有値の重複度は全て } 1 \text{ である．}$$

が成り立つことを示せ．従って，固有値が全て異なる行列に成分が近い行列については，その固有値は全て異なる．特に対角化可能である．

※ 必要に応じて次の事実を認めて用いて良い．

定理． $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{C}[x]$ とする．f が重根を持たなければ，

$$\exists \delta > 0,\ |b_1 - a_1| < \delta, \ldots, |b_n - a_n| < \delta$$
$$\Rightarrow g(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n \text{ とすると } g \text{ は重根を持たない．}$$

が成り立つ．

6) $A \in M_n(K)$ とし，A のある固有値の重複度は 2 以上であるとする．このとき

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists X \in M_n(K),\ \|X - A\| < \epsilon,\ X \text{ は } K\text{-上対角化不可能である．}$$

が成り立つことを示せ．従って，対角化可能な行列であっても，固有値が重複していると，少しでも成分が変わると対角化不可能になる場合がある．

（以上）