２０１４年度数学 II（理 I 16,21,22 組向け，足助担当）　演習問題 6　　　'14/11/17（月）

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

定義 6.1.

$$M_n(\mathbb{Z}) = \{\,\text{整数を成分とする } n \text{ 次正方行列全体}\,\},$$
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid \exists B \in M_n(\mathbb{Z}),\ AB = BA = E_n\}$$

と置く.

問 6.2. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ とする.

1) $\det A = 1$ あるいは $\det A = -1$ が成り立つことを示せ.
2) $A = (a_1\ \cdots\ a_n)$ と列ベクトルを用いて表す．$1 \leq k \leq n$ とし，$a_k = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$ とすると，$a_{k1}, \ldots, a_{kn}$ の最大公約数は 1 であることを示せ．ここで，$p \in \mathbb{N}$ が $q_1, \ldots, q_r \in \mathbb{Z}$ の最大公約数であるとは，p が条件
   a) $p > 0$ が成り立つ.
   b) $1 \leq j \leq r$ について p は q_j を割り切る.
   c) $q' \in \mathbb{N}$ が条件 a)，b) を満たすならば $q' \leq q$ が成り立つ.

   を満たすこととする.

問 6.3. $A \in M_2(K)$ とする.

1) $\operatorname{tr} A^2$ を $\operatorname{tr} A$ と $\det A$ を用いて表せ.
2) $\operatorname{tr} A^k$ を $\operatorname{tr} A$ と $\det A$ を用いて表せ.

注 6.4. $A \in M_n(K)$ としても同様のことが成り立つが,

$$\det(tE_n + A) = t^n + f_1(A)t^{n-1} + \cdots + f_n(A)$$

により $f_1(A) = \operatorname{tr} A, f_2(A), \ldots, f_n(A) = \det A$ を定め，これらを用いる必要がある．興味があれば Newton の公式，基本対称式，不変多項式について調べてみよ．問 1.26 も参照のこと.

問 6.5 (正確なことは外積代数について調べよ)．演算 $\wedge$ を条件

a) $(v, w) \mapsto v \wedge w$ は v, w について線型である（$\wedge$ は双線型である）.
b) $(v \wedge w) \wedge u = v \wedge (w \wedge u)$ が成り立つ.
c) $v \wedge w = -w \wedge v$ が成り立つ.

により定める．たとえば $n=3$，$A=(a_{ij})\in M_3(K)$ とし，(e_1,e_2,e_3) を K^3 の標準基底とすれば

$$\begin{aligned}(Ae_1)\wedge(Ae_2)&=(a_{11}e_1+a_{21}e_2+a_{31}e_3)\wedge(a_{12}e_1+a_{22}e_2+a_{32}e_3)\\&=\sum_{1\leq i,j\leq 3}a_{i1}e_i\wedge a_{j2}e_j\\&=\sum_{i<j}(a_{i1}a_{j2}-a_{i2}a_{j1})e_i\wedge e_j\end{aligned}$$

が成り立つ（rot の定義と比べてみよ）．さて，$(e_1,\ldots,e_n)$ を $V=K^n$ の標準基底とし，$A\in M_n(K)$ とすると，$(Ae_1)\wedge\cdots\wedge(Ae_n)=(\det A)e_1\wedge\cdots\wedge e_n$ が成り立つことを示せ.

ここではこれ以上触れないが，外積代数は grad，rot，div などとも関係する．

問 6.6. $\mathbb{C}^n$ に標準エルミート計量を入れる．

1) $x,y\in\mathbb{C}^n$，$A\in M_n(\mathbb{C})$ について $\langle y\,|\,Ax\rangle=\langle A^*y\,|\,x\rangle$ が成り立つことを，標準計量の定義を用いて直接示せ.

2) $f\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ を線型写像とする．すると

$$\exists!\,y\in\mathbb{C}^n,\ \forall\,x\in\mathbb{C}^n,\ f(x)=\langle y\,|\,x\rangle$$

が成り立つことを示せ.

ヒント：y が存在すれば唯一であることは計量の正値性（あるいは非退化性）を用いれば容易にわかる．y が実際に存在することを示すためには，例えば $(e_1,\ldots,e_n)$ を標準的な順序付き基底として $f(e_i)$ を考えてみよ．もしこれが $\langle y\,|\,e_i\rangle$ に等しいのであれば，y の座標ベクトルが求まるはずである.

3) $y\in\mathbb{C}^n$，$A\in M_n(\mathbb{C})$ とし，$f\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ を

$$f(x)=\langle y\,|\,Ax\rangle$$

により定める[†1]．2) により，$z\in\mathbb{C}^n$ であって，

$$\forall\,x\in\mathbb{C}^n,\ f(x)=\langle z\,|\,x\rangle$$

が成り立つものが唯一存在する．この z について $z=A^*y$ が成り立つことを示せ.

4) $y\in\mathbb{C}^n$ とする．このとき，$f_y\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ を

$$f_y(x)=\langle y\,|\,x\rangle$$

[†1] このようなとき，$\langle y\,|\,Ax\rangle$ を $\langle y\,|A|\,x\rangle$ と表すことも多いが，この講義ではこの記法は用いない.

により定める（3）で $A=E_n$ とした場合である）．y に $f_y \in V^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ を対応させる写像は以下の性質を持つことを示せ．

a) $\forall y, z \in \mathbb{C}^n,\ f_{y+z} = f_y + f_z$,

b) $\forall y \in \mathbb{C}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ f_{\lambda y} = \overline{\lambda} f_y$.

このような写像を**反線型写像・共役線型写像**などと呼ぶことがある[†2]．

問 6.7. 1) $X, Y\colon \mathbb{R} \to M_n(K)$ を微分可能とする．

$$\frac{d}{dt}XY(t) = \frac{dX}{dt}(t)Y(t) + X(t)\frac{dY}{dt}(t)$$

が成り立つことを示せ．

2) $X\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(K)$ を微分可能とし，$X^{-1}(t) = (X(t))^{-1}$ と定める．

$$\frac{d}{dt}X^{-1}(t) = -X^{-1}(t)\frac{dX}{dt}(t)X^{-1}(t)$$

が成り立つことを示せ．

問 6.8 (3) は問 1.21 と同一)． 1) $X\colon \mathbb{R} \to M_n(K)$ を微分可能とする．$X = (x_1\ \cdots\ x_n)$ と列ベクトルに値をとる函数により表す．また，$\widetilde{X}(t)$ を $X(t)$ の余因子行列とすると

$$\begin{aligned}\frac{d\det X}{dt} &= \det\begin{pmatrix}\dfrac{dx_1}{dt} & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}x_1 & \dfrac{dx_2}{dt} & x_3 & \cdots & x_n\end{pmatrix} + \cdots + \det\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_{n-1} & \dfrac{dx_n}{dt}\end{pmatrix}\\ &= \mathrm{tr}\left(\widetilde{X}\frac{dX}{dt}\right)\end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．

2) $X\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ を微分可能とすると

$$\mathrm{tr}\left(X^{-1}(t)\frac{dX}{dt}(t)\right) = \frac{d}{dt}\log(\det X(t))$$

が成り立つことを示せ．なお，X の定義域と log を適切に定めればこの式は $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ としても成り立つ．

3) $X \in M_n(K)$ とする．$A \in M_n(K)$ とし，$A = (a_1\ \cdots\ a_n)$ と列ベクトルを用いて表すと

$$\det(Xa_1\ a_2\ \cdots\ a_n) + \cdots + \det(a_1\ \cdots\ a_{n-1}\ Xa_n) = (\mathrm{tr}\, X)(\det A)$$

が成り立つことを示せ．

[†2] V^* は V の双対空間である．y に f_y を対応させる対応は，テンソル解析の言葉で言えば計量を用いて y の（上についている）添字を下に下げることである．また，y をケットベクトル $|y\rangle$ とみなす時には f_y はしばしば $|y\rangle^\dagger$ で表される．$|y\rangle^\dagger = \langle y|$ が（定義により）成り立つ．4) は計量による添字の上げ下げ，あるいは対応 *（あるいは †）による，ケットベクトルとブラベクトルとの変換は反線型であることを意味する．

ヒント：直接計算で示すことはやや困難である．行列式のそもそもの定義（成分を用いない定義）を用いることを考えてみよ．

4) $X \in M_n(K)$ とすると

$$\det \exp tX = e^{t \operatorname{tr} X}$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：たとえば三角化を用いてもよいし，1) と 3) を用いて常微分方程式の話に持ち込むこともできる．

次の問は数理科学 II（常微分方程式）で扱うことであるが，実際には問 6.8 の簡単な応用である．

問 6.9. $X \in M_n(K)$ とし，$v_1, \ldots, v_n \colon \mathbb{R} \to K^n$ を常微分方程式

$$\frac{dv}{dt}(t) = Xv(t) \tag{6.10}$$

の解とし，$W \colon \mathbb{R} \to K$ を

$$W(t) = \det(v_1(t) \ \cdots \ v_n(t))$$

により定める．W は $v_1, \ldots, v_n$ の**ロンスキアン**（Wronskian）と呼ばれる．

1) $W(t)$ は常微分方程式

$$\frac{df}{dt}(t) = (\operatorname{tr} X) f(t)$$

を満たすことを示せ．また，$W(t)$ を $V(0)$ を用いてなるべく具体的に求めよ．

2) 二条件

a) $\exists t_0 \in \mathbb{R},\ W(t_0) \neq 0$

b) $\forall t \in \mathbb{R},\ W(t) = 0$

は同値であることを示せ．

3) $A(t) = (v_1(t) \ \cdots \ v_n(t))$ と置き，$W = \det A$ は 2) の同値な条件を満たすとする．$w_1, \ldots, w_n \colon \mathbb{R} \to K^n$ も (6.10) の解であるとし，$A'(t) = (w_1(t) \ \cdots \ w_n(t))$ と置く．すると，$P \in M_n(K)$ が一意的に存在して $\forall t \in \mathbb{R},\ A'(t) = A(t)P$ が成り立つことを示せ．また，$W' = \det A'$ が 2) の同値な条件を満たすことと，$P \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことは同値であることを示せ．

（以上）