２０１４年度数学 II（理 I 16,21,22 組向け，足助担当）　演習問題 4　　'14/10/20（水）
'14/10/21：問 4.1 の 2)，π の定義中の w_1, w_2 を u_1, u_2 に修正．3d) の誤植を修正．

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．

問 4.1. $f\colon V \to W$ を線型写像とする．V_1, W_1 をそれぞれ V, W の部分線型空間とし，$f(V_1) \subset W_1$ が成り立つとする．ここで $f_1\colon V_1 \to W_1$ を f の V_1 への制限とする．$\dim V = n$, $\dim V_1 = n_1, \dim W = m$, $\dim W_1 = m_1$ とし，$\mathscr{V}_1 = (v_1, \ldots, v_{n_1})$, $\mathscr{W}_1 = (w_1, \ldots, w_{m_1})$ をそれぞれ V_1, W_1 の順序付き基底，$\mathscr{V} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathscr{W} = (w_1, \ldots, w_m)$ をそれぞれ $\mathscr{V}_1, \mathscr{W}_1$ の拡大であるような V, W の順序付き基底とする．最後に $A \in M_{m,n}(K)$ を $(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ に関する f の，$A_1 \in M_{m_1,n_1}(K)$ を $(\mathscr{V}_1, \mathscr{W}_1)$ に関する f_1 の表現行列とする．

1) $n_2 = n - n_1$, $m_2 = m - m_1$ とすると，ある $A_2 \in M_{m_2,n_2}(K)$ と $B \in M_{m_1,n_2}(K)$ が存在して
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ O_{m_2,n_1} & A_2 \end{pmatrix}$$
が成り立つことを示せ．

2) $V_2 = \langle v_{n_1+1}, \ldots, v_n \rangle$, $W_2 = \langle w_{m_1+1}, \ldots, w_m \rangle$ と置く．V_2, W_2 はそれぞれ V_1, W_1 の補空間である．また，$\mathscr{V}_2 = (v_{n_1+1}, \ldots, v_n)$, $\mathscr{W}_2 = (w_{m_1+1}, \ldots, w_m)$ とすれば $\mathscr{V}_2$, $\mathscr{W}_2$ はそれぞれ V_2, W_2 の順序付き基底である．さて，$\pi\colon W \to W_2$ を次のように定める．まず $w \in W$ を直和分解 $W = W_1 \oplus W_2$ に従い $w = u_1 + u_2$ と（一意的に）表し，$\pi(w) = u_2$ と置く．

2a) π は $\mathscr{W}_1$ の $\mathscr{W}$ への拡大の仕方が異なる，つまり $w_{m_1+1}, \ldots, w_m$ が異なると一般には異なる写像である．このことを例を作って確かめよ．

2b) $\iota\colon V_2 \to V$ を包含写像とし，$g\colon V_2 \to W_2$ を $g(v_2) = \pi \circ f \circ \iota$ により定める．g の $(\mathscr{V}_2, \mathscr{W}_2)$ に関する表現行列は A_2 であることを示せ．

3)* （この問は商空間について知っている場合に解けばよい.）$v \in V$ が代表する V/V_1 の同値類を $[v]$ で表す．同様に $w \in W$ が代表する W/W_1 の同値類を $[w]$ で表す．

3a) $\overline{\mathscr{V}}_2 = ([v_{n_1+1}], \ldots, [v_n])$ とすると $\overline{\mathscr{V}}_2$ は V/V_1 の順序付き基底であることを示せ．同様に $\overline{\mathscr{W}}_2 = ([w_{m_1+1}], \ldots, [w_m])$ とすると $\overline{\mathscr{W}}_2$ は W/W_1 の順序付き基底である．

3b) $\bar{f}\colon V/V_1 \to W/W_1$ を次のように定めると well-defined であることを示せ．$u \in V/V_1$ とし，$v \in V$ を用いて $u = [v]$ と表す（v は必ずしも一意的ではないことに注意せよ）．そして $\bar{f}(u) = [f(v)] \in W/W_1$ と置く．

3c) $\bar{f}$ の $(\overline{\mathscr{V}}_2, \overline{\mathscr{W}}_2)$ に関する表現行列は A_2 であることを示せ．

3d) $i = 1, \ldots, n_2 = n - n_1$ について $x_i \in V$ を $[x_i] = v_{i+n_1}$ であるように選ぶ．また，$j = 1, \ldots, m_2 = m - m_1$ について $y_j \in W$ を $[y_j] = w_{j+m_1}$ であるように選ぶ．$\mathscr{V}' = (v_1, \ldots, v_{n_1}, x_1, \ldots, x_{n_2})$, $\mathscr{W}' = (w_1, \ldots, w_{m_1}, y_1, \ldots, y_{m_2})$ とすると $\mathscr{V}', \mathscr{W}'$ はそれぞれ V, W の順序付き基底であることを示し，$(\mathscr{V}', \mathscr{W}')$ に関する f の表現行列を求めよ．

問 4.2. 問 4.1 において $W = V$, $W_1 = V_1$ とすると V_1 は f-不変な部分線型空間である．この場合にどのようなことが（対応して）成り立つか，$m = n, m_1 = n_1$ 等と置いて具体的に書き下せ．

講義で示した補題 7.3.1 の方が，仮定は強いものの結論は問 4.1 よりも見やすい．いつも補題 7.3.1 の様な状況になれば話は簡単であるが，実際にはそうはいかず，問 4.1 のような状況を考えないといけないこともある（詳しくは後日扱う）．

注 4.3. f を V の線型変換，$W \subset V$ を部分線型空間とするとき，W が f-不変であるからといって $w \in W$ について $f(w) = w$ が成り立つとは限らない．例えば $V = K^2$ とし，$f\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 \\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix}$ とする．$W_1 = \left\{\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ 0\end{pmatrix} \middle| \lambda_1 \in K\right\}, W_2 = V$ とすると W_1, W_2 は共に f-不変であるが（確かめよ），$\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} \in W_1$ については $f\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \\ 0\end{pmatrix}(\in W_1)$ が，$\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} \in W_2$ については $f\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \\ 2\end{pmatrix}(\in W_2)$ が成り立つ．

問 4.4. $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ とする．K^3 の A-不変な部分線型空間を全て求めよ．
ヒント：幾つか「基本的なパーツ」を見つければ後はそれらを組み合わせて表すことができる．

問 4.5. $C^\infty(\mathbb{R}) = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^\infty \text{ 級}\}$ と置く．変数は t とする．$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ について $Df = \dfrac{df}{dt}$ と定める．

1) $\lambda \in \mathbb{R}$ とする．$W_\lambda = \{c\, e^{\lambda t} \mid c \in \mathbb{R}\}$ とすると W_λ は D-不変な $C^\infty(\mathbb{R})$ の部分線型空間であることを示せ．
2) $\mathbb{R}[t] \subset C^\infty(\mathbb{R})$ は D-不変な部分線型空間であることを示せ．
3) $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ とする．$\mathbb{R}_n[t] \subset C^\infty(\mathbb{R})$ は D-不変な部分線型空間であることを示せ．

問 4.6. $V = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in K,\ a_{n+6} = a_n\}$，$W = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in K,\ a_{n+3} = a_n\}$ と置く．また，$a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V$ について，

$$\langle a \mid b \rangle = \sum_{i=0}^{5} \overline{a_i} b_i$$

と置く．最後に，V の線型変換 f を $f(a)_n = a_{n+3}$ により定める．$f(a)$ は $a_3, a_4, \ldots,$ と続く数列である．

1) V は有限次元である．$\dim V$ を求めよ．
2) W は V の部分線型空間であることを示せ．また，$\dim W$ を求めよ．
3) W の V における補空間を一つ求めよ．
4) W は f-不変であることを示せ．
5) W の V における補空間で，f-不変な物が存在するのであれば一つ求め，存在しないのであればそのことを示せ．
6) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は V のユークリッド計量（$K = \mathbb{R}$）あるいはエルミート計量（$K = \mathbb{C}$）であることを示せ．
7) W の V における直交補空間を求めよ．

（以上）