２０１４年度数学 II（理 I 16,21,22 組向け，足助担当）　演習問題 2　'14/10/6（月）
'14/12/8：全体に問 1.$*$ としていたのを問 2.$*$ とした．

注意（基本的なことについては夏学期に配布したものを参照のこと）**.**

- これはあくまで演習問題であって期末試験や追試験の事前公開ではない．
- どうも具体的な計算が苦手な者が多いようなので，前半（問 2.1 まで）に幾つか典型的な問題を載せた．これらは使い回しなのでどこかで見たことがあるかもしれない．一方，これだけではつまらないと思われるので後半は（定義 2.4 以降）は新たに作問した[1]．

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．

問 2.1. 次の行列の逆行列が存在するかどうか判定し，存在するならそれを求めよ．また，各々の行列の行列式及び rank（ランク・階数）を求めよ[2]．
※ 全てを別々に解くと大変なことになる[3]．工夫した方が良い．

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$　5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$　6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

問 2.2. 次の方程式の解空間を

$$\{v \in K^n \mid \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K,\ v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + w\}$$

の形に表せ．ただし，n, r および $v_1, \ldots, v_r, w$ は適宜定めよ．また，r は最小になるように定めよ．

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

---

[1] そうはいっても類題はあるに決まっているし，ひょっとすると全く同じ問題がどこかにあるかもしれない．
[2] 2) 3) は笠原晧司著 線形代数学（サイエンス社）から採った
[3] 大変面倒くさい．

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$，ただし $a, b \in K$.

問 2.3. V を以下のように定める．$V \neq \varnothing$ であるならば，n, r 及び $v_1, \dots, v_r, w \in K^n$ を適当に（適切にという意味である）定め，$V = \{v \in K^n \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \text{ s.t. } v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + w\}$ が成り立つようにせよ．ただし，r は v_i 達に過不足が生じないように定めること．一方，$V = \varnothing$ であるならばそのことを示せ.

1) $V = \left\{ v \in K^5 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

2) $V = \left\{ v \in K^5 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -4 & 5 & 4 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

3) $V = \left\{ v \in K^5 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -4 & -5 & -16 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}$.

4) $V = \left\{ v \in K^5 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -4 & -5 & -16 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$.

定義 2.4 (固有値・固有ベクトルは冬学期の主題の一つである．線型変換に関する固有値・固有ベクトルも定まり，重要であるが，これも合わせて後日[4]講義で扱う).
$A \in M_n(K)$ とする．$\lambda \in K$ が A の**固有値**あるいは**特性値**である[5]とは,

$$\exists v \in K^n,\ v \neq o,\ Av = \lambda v$$

が成り立つことを言う．また，このとき v を固有値 λ に属する**固有ベクトル**あるいは**特性ベクトル**と呼ぶ.

注 2.5. 定義 2.4 において条件「$v \neq o$」は重要である．実際，任意の $A \in M_n(K)$, $\lambda \in K$ について $Ao = \lambda o (= o)$ が成り立つ.

[4]部分線型空間に関する性質や内積を先に扱うので，少し先になる予定である.
[5]夏学期の講義では λ は K^n の元を表すのに多く用いたが，固有値を表すことも多い．ここでは敢えて記号を変えていない.

問 2.6. $A \in M_n(K)$ とする．

1) λ が A の固有値であることと，$v \in K^n$ に関する方程式 $Av = \lambda v$ は $v \neq o$ なる解を持つことは同値であることを示せ．
2) $\lambda \in K$ が A の固有値であるとすると，$\det(\lambda E_n - A) = 0$ が成り立つことを示せ．
3) 関係式 $\det(\lambda E_n - A) = 0$ を λ に関する方程式とみなすと n 次方程式であって，n 次の係数は 1 であることを確かめよ．

定義 2.7. 方程式 $\det(tE_n - A) = 0$ を A の**固有方程式**あるいは**特性方程式**と呼ぶ．また，多項式 $\det(tE_n - A)$ を A の**固有多項式**あるいは**特性多項式**と呼ぶ．なお，ここでは変数は t としたが，特に決まりがあるわけではない．

4) λ を A の固有値，v を λ に属する固有ベクトルとする．$V = Kv$ と置く（直感的には V は v を方向ベクトルとする，原点を通る直線である）と，V は A によって不変であることを示せ．即ち，$\forall v \in V,\ Av \in V$ が成り立つことを示せ．
5) $K = \mathbb{R}$，$A \in M_n(\mathbb{R})$ とすると，固有方程式が $\mathbb{R}$ の範囲に解を持たないことがある．このような例を一つ挙げよ．
   注意：$K = \mathbb{C}$ とすると，このような問題は起きない（代数学の基本定理による）．

夏学期で扱ったことに関しては，$K = \mathbb{R}$ であっても $K = \mathbb{C}$ であっても話は全く変わらなかった．しかし，固有値を考える際には問 2.6 の 5) で指摘したように差異が生じる．特に $K = \mathbb{R}$ の場合には固有値が存在しないことがある．これでは多くの場合困るので，そのような場合には実行列を複素行列とみなし，固有値は複素数の範囲で考える（すると必ず固有値が存在する）．

固有値に関して，次のように定める．

定義 2.8. $A \in M_n(K)$ とし，$\lambda \in K$ を A の固有値とする．

$$\{v \in K^n \mid Av = \lambda v\}$$

を（A の固有値）**λ に属する A の固有空間**と呼ぶ．

$A \in M_n(K)$ とし，$\lambda \in K$ を A の固有値とする．f を A の固有多項式（変数を t とする）とすると，f は $f(t) = (t - \lambda)^n g(t)$，$g(\lambda) \neq 0$ と（部分的に）因数分解される．

定義 2.9. n を λ の**重複度**あるいは**代数的重複度**と呼ぶ．

問 2.10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ と置く．A の相異なる固有値の全てと，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ．

問 2.11. $A \in M_n(K)$ を上三角行列とする（特に対角行列の場合も含まれる）．すると，A の固有値は重複度を込めて A の対角成分と一致することを示せ．

問 2.12. $A \in M_n(K)$ とする．

1) A は n 個の互いに異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を持つとする．$i = 1, \ldots, n$ について v_i を λ_i に属する固有ベクトルとすると $v_1, \ldots, v_n$ は線型独立であることを示せ．特に $\{v_1, \ldots, v_n\}$ は K^n の基底である．
2) $A = E_n$ とすると，A の固有値は 1 のみで，重複度は n であることを示せ．また，A の固有ベクトルからなる K^n の基底が存在することを示せ（実際には任意の基底がそうである）．
3) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ を A の固有ベクトルからなる K^n の基底とし，$Av_i = \lambda_i v_i$ とする（ただし，$i \neq j$ であっても $\lambda_i \neq \lambda_j$ であるとは仮定しない．例えば $A = E_n$ の場合がそうである）．$P = (v_1 \ \cdots \ v_n)$ とすると，$\{v_1, \ldots, v_n\}$ が基底であることから $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つ．これらのことを踏まえて $P^{-1}AP$ を求めよ．

注 2.13. 問 2.12 の 1) と 2) は，A の固有値が互いに異なることは，A の固有ベクトルからなる K^n の基底が存在するための十分条件であるが，必要条件ではないことを示している．このことについての詳しいことは後日講義で扱う．

問 2.14. $n \geq 2$ とし，$A \in M_n(\mathbb{C})$ を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

により定める．このような形の行列を**コンパニオン行列**と呼ぶ（転置行列もコンパニオン行列と呼ぶことがある．また，$n = 1$ の場合にも定めることがある）．コンパニオン行列は数列や常微分方程式，差分方程式を扱う際などに良く現れる[6]．ここでは $K = \mathbb{C}$ としているが，勿論 $K = \mathbb{R}$ の場合にも考える．

1) A の固有多項式は，t を変数とすると
$$t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \cdots - a_1 t - a_0$$
で与えられることを示せ．
2) 各固有値に属する A の固有空間はそれぞれ 1 次元であることを示せ．

[6]例えばグラフを扱う時などに数列や差分方程式は良く現れる．

3) A の固有多項式が重根を持たないことと， A の固有ベクトルから成る $\mathbb{C}^n$ の基底が存在することは同値であることを示せ．

問 2.15. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ とする（符号に注意）．

A) 複素数列 $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ は漸化式

$$a_{m+n} + \alpha_{n-1}a_{m+n-1} + \alpha_{n-2}a_{m+n-2} + \cdots + \alpha_0 a_m = 0$$

をみたすとする．

A1) $\mathbb{C}^n$ に値をとるベクトル列（「$\mathbb{C}^n$ の点列」と呼ぶのが一般的である）$\{v_m\}$ を

$$v_m = \begin{pmatrix} a_m \\ a_{m+1} \\ \vdots \\ a_{m+n-1} \end{pmatrix}$$

により定めると，$v_{m+1} = Av_m$ が成り立つことを示せ．

A2) A の固有多項式は重根を持たないとし，根を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする．$\{u_1, \ldots, u_n\}$ を A の固有ベクトルから成る $\mathbb{C}^n$ の基底とし，$P = (u_1 \ \cdots \ u_n)$ と置く．$\mathbb{C}^n$ の点列 $\{w_m\}$ を

$$w_m = P^{-1}v_m$$

により定める．$\{w_m\}$ のみたす漸化式を求めよ．また，条件（初期条件） $w_0 = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$ をみたす $\{w_m\}$ を（全て）求めよ．

A3) 初期条件 $v_0 = \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{pmatrix}$ をみたす $\{v_m\}$ を，$\{w_m\}$ を用いて求める方法を考えよ．また，$\{a_m\}$ について，どれだけの初期条件を自由に定めることができるか，また，初期条件を定めた場合に実際に $\{a_m\}$ を求める方法を考えよ．

B) 複素数値をとる，実数 t を変数とする函数 f は常微分方程式

$$\frac{d^n f}{dt^n} + \alpha_{n-1}\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}} + \cdots + \alpha_0 f = 0$$

をみたすとする．ここで，f が複素数値函数であるとき，$f = g + \sqrt{-1}h$ と実数値函数 g, h を用いて f を表し，

$$\frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt} + \sqrt{-1}\frac{dh}{dt}$$

と定める．

B1) $\mathbb{C}^n$ 値函数 F を

$$F = \begin{pmatrix} f \\ \dfrac{df}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}} \end{pmatrix}$$

により定めると，$\dfrac{dF}{dt} = AF$ が成り立つことを示せ．ただし，ベクトル値函数の微分は成分ごとに微分をとることにより定める．

B2) A の固有多項式は重根を持たないとし，根を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする．$\{u_1, \ldots, u_n\}$ を A の固有ベクトルから成る $\mathbb{C}^n$ の基底とし，$P = (u_1 \ \cdots \ u_n)$ と置く．$\mathbb{C}^n$ 値函数 G を

$$G(t) = P^{-1}F(t)$$

により定める．G のみたす常微分方程式を求めよ．また，条件（初期条件） $G(0) = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$ をみたす G を（全て）求めよ．

注：従って，数列の場合と同様に，原理的には任意の初期条件をみたす F や f が求まる．どれだけの初期条件を自由に定めることができるか，また，初期条件を定めた場合に F や f を実際に求める方法を考えよ．

差分方程式については場合 A) と似た状況になる．問 2.14 において A の固有多項式が重根を持つ場合も重要である．この場合にもほとんど同様に扱うことができるが，これについては今回は触れない．

（以上）