２０１３年度数学 II 演習（理 I 37–39 組）　第４回　'13/5/28（火）４限
訂正：'13/6/11 問 4.10 を修正
'13/6/25 問 4.18 を修正
以下では特に断らない限り $K=\mathbb{R}$ もしくは $K=\mathbb{C}$ とする．

注. １．発表に限らず，解答を作成する際には「明らか」乃至これに類する文言は原則として用いないこと．
２．よく分からなくなってしまったら，まずは K を $\mathbb{R}$ と読み替え，K^n は $\mathbb{R}^n$ あるいは $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^3$ 位に考えておき，改めて一般の場合を考えてみよ．
３．ヒントは多くの場合非自明な主張からなる．ヒントに書いてあることもきちんと証明すること．

問 4.1. 次の方程式を解け（目の子で解いてしまっても良いが，ここでは掃き出し法を用いて解く練習をしておくこと）．

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$，但し $a, b \in K$.

注. 具体的な方程式を解く問題は演習ではこれ以上扱わないが，各自練習しておくこと．

問 4.2.
1) 有理数を成分にもつ正則行列 A に対し, 逆行列 A^{-1} もまた有理数を成分にもつ行列であることを示せ．また，A の成分が全て整数であっても A^{-1} はそうであるとは限らないことを示せ．
2) 正則行列 A とその逆行列 A^{-1} がともに整数を成分にもつ行列であるとき，A の各行（各列）について，その行（列）に含まれる整数たちの（共通の）公約数は ± 1 のみであることを示せ．
ヒント：A が 2 次であればユークリッドの互除法の応用である．A のサイズがもっと大きいときはその一般化を考える必要がある．難しければ A は 3 次以下と仮定しても良い．

問 4.3. $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$V = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$ とおく．
1) V は K^n の K-部分線型空間であることを示せ．
2) $\varphi\colon K^l \to K^n$ を K-線型写像とする．$\varphi^{-1}(V) = \{u \in K^l \mid \varphi(u) \in V\}$ とおくと $\varphi^{-1}(V)$ は K^l の K-部分線型空間であることを示せ．

3) 2) において φ が行列 $B \in M_{n,l}(K)$ で表わされるとする．即ち，$e_1, \ldots, e_l$ を K^l の基本ベクトル，$e'_1, \ldots, e'_n$ を K^n の基本ベクトルとし，$b_{ij} \in K$ を条件 $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e'_i$ により定める．そして $B = (b_{ij})$ とする．このように定めた B を φ の**表現行列**と呼ぶ[†1]．すると $\varphi^{-1}(V) = \{u \in K^l \mid ABu = 0\}$ が成り立つことを示せ．

問 4.4. $\varphi\colon K^n \to K^m$ を K-線型写像とする．$e_1, \ldots, e_n$ を K^n の基本ベクトル，$e'_1, \ldots, e'_m$ を K^m の基本ベクトルとし，$a_{ij} \in K$ を条件 $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i$ により定める．すると a_{ij} は一意的であることを示せ（つまり，上の行で「定める」と言っているが，実際に一通りに定まることを示せ）．つまり，φ の表現行列[†2]は一意的である．

問 4.5. $\psi\colon K^n \to K^m$ を K-線型写像とする．このとき $\psi(K^n)$ を

$$\psi(K^n) = \{w \in K^m \mid \exists\, v \in K^n \text{ s.t. } w = \psi(v)\}$$

により定めると $\psi(K^n)$ は K^m の部分線型空間であることを示せ．

問 4.6 (問 3.1 も参照のこと)**.** $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$-線型空間と考え，$\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ を $\varphi(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{re} z \\ \operatorname{im} z \end{pmatrix}$ により定める．また，$\mu_\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $\mu_\alpha(z) = \alpha z$ により定め，また，$\tau_\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $v \in \mathbb{R}^2$ について

$$\tau_\alpha(v) = \varphi(\alpha(\varphi^{-1}(v))) = \varphi \circ \mu_\alpha \circ \varphi^{-1}(v)$$

と置くことにより定める．最後に，$A_\alpha = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ を条件

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \tau_\alpha(e_1), \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \tau_\alpha(e_2)$$

により定める[†3]．ここで $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^2$ の基本ベクトルである．$\det A_\alpha$ を求めよ．

問 4.7. 次の行列の行列式を求めよ．

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$

問 4.8. 基本行列 $P_n(i;\lambda)$, $Q_n(i,j)$, $R_n(i,j;\mu)$ を講義（教科書）と同様に定める．

1) $\det P_n(i,j)$, $\det Q_n(i;\lambda)$, $\det R_n(i,j;\mu)$ を求めよ．
2) $A, B \in M_n(K)$ の時 $\det AB = \det A \det B$ が成り立つことを踏まえて，行列の基本変形を用いて行列式を求める方法を考え，説明せよ．

[†1]厳密には，B は φ の K^l と K^m の標準基底に関する表現行列である．基底に関して未習であれば，今のところは無視して良い．

[†2]これも K^n と K^m の標準基底に関する表現行列である．

[†3]A_α は τ_α の（$\mathbb{R}^2$ の標準基底に関する）表現行列である．

問 4.9. $v_1, \ldots, v_l \in K^n$ が K 上線型独立であるとは $a_1, \ldots, a_l \in K$ とするとき

$$a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l = 0 \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_l = 0$$

が成り立つことであった．これに倣って，$v_1, \ldots, v_l \in K^n$ が K 上線型従属であるということを論理式で表せ.
ヒント：上の論理式は

$$\forall a_1, \ldots, a_l \in K,\ (a_1 v_1 + \cdots + a_l v_l = 0 \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_l = 0).$$

と読み替えることができる.

問 4.10. 1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ が $A\,{}^t\!A = E_n$ をみたすならば A は正則であって $\det A = \pm 1$ が成り立つことを示せ.

2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ が $A\,{}^t\overline{A} = E_n$ をみたすならば A は正則であって $|\det A| = 1$ が成り立つことを示せ.

問 4.11. $A \in M_n(K)$ を列ベクトルを用いて $A = (a_1, \ldots, a_n)$ と表す.

1) $a_1, \ldots, a_n$ が K 上線型従属であれば $\det A = 0$ が成り立つことを示せ.
2) $a_1, \ldots, a_n$ が K 上線型独立であれば $\det A \neq 0$ が成り立つことを示せ.

ヒント：例えば行列の基本変形を用いる.

定義 4.12. $V_1, \ldots, V_r$ を K-線型空間とする．$V_1 \times \cdots \times V_r = \{(v_1, \ldots, v_r) \,|\, v_i \in V_i,\ (i = 1, \ldots, r)\}$ と置き，

1) $(v_1, \ldots, v_r), (w_1, \ldots, w_r) \in V_1 \times \cdots \times V_r$ について，$(v_1, \ldots, v_r) + (w_1, \ldots, w_r) = (v_1 + w_1, \ldots, v_r + w_r)$,
2) $(v_1, \ldots, v_r) \in V_1 \times \cdots \times V_r,\ \lambda \in K$ について $\lambda(v_1, \ldots, v_r) = (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_r)$

とそれぞれ定める．$V_1 \times \cdots \times V_r$ を $V_1, \ldots, V_r$ の**直積**あるいは直積線型空間と呼ぶ.

注 4.13. $V_1, \ldots, V_r$ の直和と呼ばれる K-線型空間も存在する．V_i 達が有限個であれば直積と直和は一致するので直和の定義は省略する（無限個の場合について，興味があれば教科書を参照せよ．少し難しい）.

問 4.14. 1) $V_1, \ldots, V_r$ を K-線型空間とする．$V_1 \times \cdots \times V_r$ は K-線型空間であることを示せ.

2) $V_1 = \cdots = V_r = K$ とする．ここで，K は自然な方法で K-線型空間と看做す．自然な同型 $V_1 \times \cdots \times V_r \to K^r$ が存在することを示せ.

問 4.15. V を K-線型空間とし，$f_1, \ldots, f_r \colon V \to M_n(K)$ を K-線型写像とする.
写像 $F \colon \overbrace{V \times \cdots \times V}^{r\text{ 個}} \to M_n(K)$ を

$$F(v_1, \ldots, v_r) = f_1(v_1) \cdots f_r(v_r)$$

により定める（左辺は本来は $F((v_1, \ldots, v_r))$ と表すべきであるが，煩雑なので省略した）.
F は多重線型写像であることを示せ.
ヒント：$V \times \cdots \times V$ が K-線型空間であることは用いない.

次の定理のように「○○という性質を持つものは××である」という性質が成り立つとき,「××は○○という性質で特徴付けられる」と言う．また，定理自体を「××を（○○という性質によって）特徴付ける定理」などと言う．

定理 4.16. F を K に値を取る K^n 上の n-重線型写像であって，交代的であるとする．このとき，$F(v_1, \ldots, v_n) = \det(v_1 \ \cdots \ v_n)F(E_n)$ が成り立つ．特に $F(E_n) = 1$ であれば $F(v_1, \ldots, v_n) = \det(v_1 \ \cdots \ v_n)$ が成り立つ．

この定理は大事なので講義で証明する．ここでは認めて良い．

問 4.17. $v_1, \ldots, v_n \in K^n$ とする．また $A \in M_n(K)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}&\det(Av_1, v_2, \ldots, v_n) + \det(v_1, Av_2, v_3, \ldots, v_n) + \cdots + \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, Av_n)\\ = &(\operatorname{tr} A) \det(v_1, \ldots, v_n)\end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．ここで $\operatorname{tr} A$ は A の対角成分の和を表し，A の**トレース**（跡）と呼ばれる．

問 4.18. $A\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ を連続な写像とする．また，$\Lambda\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ は C^1-級の写像（各成分が 1 回連続微分可能であるような写像）であって，$\Lambda = (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_n)$ と K^n-値写像 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を用いて表すと，各 λ_i について

$$\frac{d\lambda_i}{dt}(t) = A(t)\lambda_i(t)$$

が成り立つとする．最後に，$W(t) = \det \Lambda(t)$ と置く．

1) $\dfrac{d\Lambda}{dt}(t) = \left(\dfrac{d\lambda_1}{dt}(t) \ \cdots \ \dfrac{d\lambda_n}{dt}(t)\right)$ と定めれば

$$\frac{d\Lambda}{dt}(t) = A(t)\Lambda(t)$$

が成り立つことを示せ．

2)

$$\frac{dW}{dt}(t) = (\operatorname{tr} \Lambda(t))W(t)$$

が成り立つことを示せ．

3) $W(0) = W_0$ とするとき，$W(t)$ を W_0 を用いて表せ（つまり，2) の微分方程式を初期条件 $W(0) = W_0$ の下で解け）．
注意：$\operatorname{tr} \Lambda$ は定数函数とは限らないので $W(t) = e^{t \operatorname{tr} \Lambda(t)} W_0$ としても一般にはうまくいかない．

4) $\Lambda(t)$ は t に依らず正則であるか，あるいは t に依らず正則では無いか，いずれかが成り立つことを示せ．

注 4.19. W は**ロンスキアン**と呼ばれる．ロンスキアンは「線型」な微分方程式を解く際に重要である．簡単な場合については数理科学 II で扱うのでここではこれ以上立ち入らない．

（以上）