２０１２年度数学IA演習（理I 35–39組）　第１０回　'12/12/11（火）４限

訂正:'12/12/12 問 10.1，10.3 と 10.4 を修正．特に問 10.3 に関しては注意すること．
'13/1/1 問 10.4 の誤植を修正.

問 10.1 (杉浦光夫「解析演習」より一部改題).

注：広義積分に関しては厳密に扱えればその方が望ましいが，現時点（12/11）では大雑把でよい.

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \exists t, s \in \mathbb{R},\ t \geq 0,\ s \geq 0,\ t + s \leq 1,\ (x, y) = t(\pi, 0) + s(\pi, \pi)\}$$

により定める.

1) D を図示せよ.

2) $\displaystyle\int_D \frac{y \sin x}{x} dxdy$ を累次積分（逐次積分）により二通りに表せ.

3) $\displaystyle\int_D \frac{y \sin x}{x} dxdy$ を求めよ.

問 10.2. $k \in \mathbb{R}$ とし，$\mathbb{R}^3$ の部分集合 Σ を

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z^2 = 1 + k(x^2 + y^2),\ z \geq 0\}$$

により定める．また，$f(x, y) = \sqrt{1 + k(x^2 + y^2)}$ と置く．Σ は f のグラフである.

1) Σ を $k = -1, 0, 1$ それぞれの場合について $x^2 + y^2 \leq 1$ の範囲で図示せよ.

2) $R \geq 0$ を固定し，$\Sigma_R = \{(x, y, z) \in \Sigma \,|\, z \leq \sqrt{1 + kR^2}\}$ と置く．このとき，

$$A(k; R) = \int_{x^2+y^2 \leq R} \sqrt{\det {}^t Df(x, y) Df(x, y)} dxdy$$

を求めよ（これは Σ の面積である．第 9回の演習を参照のこと）.

3) k が $[-1, 1]$ の範囲で変化するときの $A(k; R)$ の変化の様子（例えば単調増加／減少であるとか，最大・最小をどこで取るか，あるいは最大・最小は取らないか，等) を調べよ.

問 10.3. （注：恐らく配布時には講義ではまだ扱っていないので，適宜調べて解答すること.）$D(R) \subset \mathbb{R}^2$ を $D(R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R\}$ により定め，

$$S(R) = \int_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

と置く.

1) $\lim_{R \to +\infty} S(R)$ が存在することを示せ.
2) $\lim_{R \to +\infty} S(R)$ を求めよ．この値を $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ と定める．つまり，

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{R \to +\infty} \int_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

   と定める.
3) $\lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-x^2} dx$ が存在することを示せ．この値を $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ と定める.
4) $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$ が成り立つことを示せ．また，$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ を求めよ.

函数 $x \mapsto e^{-x^2}$ あるいはその積分は正規分布（ガウス分布）と関連が深い．これらは確率や統計において重要であるが，それに限らず，幾何などでも重要である.

問 10.4. $V = \{f \colon [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ とする．V は $\mathbb{R}$-線型空間である（各自で示すこと）．$f, g \in V$ について

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

と置く．以下の問に答えよ．なお，講義で扱っていない用語は線型空間に関するものである．いずれも初歩的なものなので定義を知らなければ調べること.

1) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は V の内積を定めることを示せ.
2) 正の整数 n について，$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ と置く．$\{P_n\}_{n=1,2,\dots}$ は $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関して正規直交系をなす事を示せ.
3) $\{P_n\}_{n=1,2,\dots}$ は V の正規直交基底であるか，理由と共に述べよ.

（以上）