２０１２年度数学IA演習（理I 35–39組）　第４回　　　　　　　'12/6/5（火）４限
'12/6/5 一部訂正

特に断らなければ $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}^+$ とする．また，時々ヒントを記すが無理に用いる必要はない．一方，用いるのであればヒントに書かれていることもよほど当たり前のことでない限り示すこと．

問 4.1. ここでは次の定理について調べる．

定理． $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ とし，$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続な単射であるとする．このとき，ある $c, d \in \mathbb{R}$, $c \leq d$ について $f([a,b]) = [c,d]$ が成り立つ．また，$f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ も連続である．

このとき以下を示せ．この問に関して黒板で発表する際には，小問毎（1)，2)，3)，4)）に分けてよい．

1) 前半の主張を，コンパクト集合上で連続函数が最大値・最小値をとることと，中間値の定理を用いて示せ．ただし，$\mathbb{R}^n$ の部分集合が有界閉集合であること，点列コンパクトであること，コンパクトであることが全て同値であることは用いて良い．
2) 最後の主張を以下の方針に沿って示せ．f は狭義単調であるので，ここでは狭義単調増加とする．また，$g = f^{-1}$ と置く．
   (a) $x \in [a,b]$ とし，$x = g(y)$ と表す．$\varepsilon > 0$ が与えられたする．目標は，$\delta > 0$ が存在して $|y' - y| < \delta$ であれば $|g(y') - g(y)| < \varepsilon$ が成り立つことを示すことであるが，必要であれば ε を小さく取り直して，$x \in (a,b)$ であれば $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset [a,b]$，$x = a$ であれば $[x, x+\varepsilon) \subset [a,b]$，$x = b$ であれば $(x-\varepsilon, x] \subset [a,b]$ であるとして δ を見つければよいことを示せ．
   (b) 上の三つの場合に応じて，$\delta > 0$ を $(y-\delta, y+\delta) \subset (f(x-\varepsilon), f(x+\varepsilon))$, $[y, y+\delta) \subset [f(x), f(x+\varepsilon))$, $(y-\delta, y] \subset (f(x-\varepsilon), f(x)]$ のいずれかが成り立つように取れることを示せ．二番目と三番目の場合については，x の値に注意して y が実際にはどのような値であるかも決定せよ．
   (c) 上のそれぞれの場合について $(g(y-\delta), g(y+\delta)) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $[g(y), g(y+\delta)) \subset [x, x+\varepsilon)$, $(g(y-\delta), g(y)] \subset (x-\varepsilon, x]$ のいずれかが成り立つことを示せ．
   注意：一般には等号は成り立たない．
   (d) $y' \in [c,d]$, $|y' - y| < \delta$ ならば $|g(y') - x| < \varepsilon$ が成り立つことを示せ．
3) 最初の定理において $a < b$ とし，$[a,b]$ を (a,b) に置き換えても良いことを示す．ただし，a として $-\infty$ を，b として $+\infty$ を許すことにする．$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ は連続な単射であるとする．$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ をそれぞれ狭義単調減少，狭義単調増加な

数列とし，$\lim_{n\to+\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to+\infty} b_n = b$ なるものとする（ただし，$a=-\infty$ の時には $\{a_n\}$ は $-\infty$ に，$b=+\infty$ の時には $\{b_n\}$ は $+\infty$ にそれぞれ発散するとする．以下でも同様である）．

(a) $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[a_n, b_n] = (a, b)$ が成り立つことを示せ.

(b) $f((a,b)) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f([a_n, b_n])$ が成り立つことを示せ.

(c) f は狭義単調増加あるいは狭義単調減少であることを示せ.

(d) 以下では f は狭義単調増加とする．$c_n = f(a_n),\ d_n = f(b_n)$ と置くと，$\lim_{n\to+\infty} c_n$ は存在するか，あるいは $-\infty$ であることを示せ．また，$\lim_{n\to+\infty} d_n$ は存在するか，あるいは $+\infty$ であることを示せ.

(e) $c = \lim_{n\to+\infty} c_n$ と置く．右辺が発散する場合には形式的に $c=-\infty$ とする．また，$d = \lim_{n\to+\infty} d_n$ と置く．右辺が発散する場合には形式的に $d=+\infty$ とする．$f((a,b)) = (c,d)$ が成り立つことを示せ.

(f) $f^{-1}\colon (c,d) \to (a,b)$ は連続であることを示せ.

(g) a, b は有限の値であるが，$(c,d) = \mathbb{R}$ となるような f の例を挙げよ．逆に，$(a,b) = \mathbb{R}$ であるが c, d が有限の値となるような f の例を挙げよ.

4) f の定義域が $(a,b]$ あるいは $[a,b)$ の時にも同様のことが成り立つことを示せ．ただし，前者の場合には $a=-\infty$ を，後者の場合には $b=+\infty$ を許す.

問 4.2. $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ について $\|A\| = \sqrt{\sum_{m,n} |a_{ij}|^2}$ と置く．ここで，a_{ij} は A の (i,j) 成分である.

1) $v(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}$ と置く．$\mathbb{R}^{mn}$ の標準的なノルムも $\|\cdot\|$ で表すことにすると $\|A\| = \|v(A)\|$ が成り立つことを示せ.

2) $v \in M_{1,n}(\mathbb{R}),\ w \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ とする．$|vw| \le \|v\|\,\|w\|$ が成り立つことを示せ．必要であれば Schwarz の不等式は認めて良い.

3) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})\ \ B \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ とする．$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$ が成り立つことを示せ.

4) $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ について $\langle A|B\rangle = \operatorname{tr} {}^t\!AB$ と置く．すると $\langle\cdot|\cdot\rangle$ は $M_{m,n}(\mathbb{R})$ の（ユークリッド）内積であることを示せ．また，$\|A\| = \sqrt{\langle A|A\rangle}$ であることを示せ.

問 4.3. $f, g\colon \mathbb{R} \to M_3(\mathbb{R})$ を

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

により定める．実際には f, g は 3 次の直交群（直交行列全体のなす群．SO_3 などと表される）に値をとる写像である．

1) ${}^t f(t) f(t) = I_3$, ${}^t g(t) g(t) = I_3$ が成り立つことを示せ．ここで I_3 は 3 次の単位行列を表す．また $A \in M_3(\mathbb{R})$ について ${}^t A$ で A の転置行列を表す．
2) $Df(t) = \dfrac{df}{dt}(t)$ を求めよ．また，$Df(0) + {}^t Df(0) = O_3$ が成り立つことを示せ．
3) $D(fg^{-1})(t)$ を求めよ．
4) $D(fgf^{-1}g^{-1})(t)$ を求めよ．また，$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，$[A, B] = AB - BA$ を求めよ．
5) A, B を上のように定めると $f(t) = \exp tA$, $g(t) = \exp tB$ がそれぞれ成り立つことを示せ．また，$h(t) = \exp t[A, B]$ とするとき，$D(fgf^{-1}g^{-1}h^{-1})(0)$ を求めよ．

問 4.4. $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする．

1) f, g は $0 \in \mathbb{R}$ において微分可能であるとし，$f(0) = g(0) = 0$ とする．$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{Df}{Dg}(x)$ が存在する[†1]ならば $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f}{g}(x)$ も存在してこれらの値は等しいことを示せ（0 を $\mathbb{R}$ の任意の値に取り換えても同様の主張が成り立つ）．
2) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $g(x) = x$ とする．f は $x = 0$ で微分可能であることを示せ．また，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f}{g}(x)$ は存在するが $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{Df}{Dg}(x)$ は存在しないことを示せ（収束しないことはきちんと収束の定義に基づいて示すこと）．
3) $a < b$ とし，f, g は (a, b) 上微分可能であるとする．$a = -\infty$ あるいは $b = +\infty$ の場合も許す．$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{Df}{Dg}(x)$ が存在するならば $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x)$ も存在してこれらの値は等しいことを示せ．a を b に変えても同様のことが成り立つことも各自で確かめること．
4) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ とする．$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f}{g}(x)$ は存在するが $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{Df}{Dg}(x)$ は存在しないことを示せ（収束しないことはきちんと収束の定義に基づいて示すこと）．

定義 4.5. U を連結な区間とする．ただし，無限区間も許す（例えば $U = (-\infty, b)$ なども許す）．

[†1]存在して有限の値であることをしばしばこのように言う．

1) $l\colon U\to\mathbb{R}^2$ が C^∞ 級の**正則な曲線**であるとは，l は無限回微分可能（きちんとした定義は講義で扱う）な写像であって，$Dl(t)$ が（ベクトルとして）0 にならないことを言う．

2) l_1, l_2 を正則な曲線とし，$l_1(t_0)=l_2(t_0)$ が成り立つとする．ある $\lambda\in\mathbb{R}$ について $Dl_1(t_0)=\lambda Dl_2(t_0)$ が成り立つとき，l_1 と l_2 は $t=t_0$ において**接する**と言う．

3) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 L が C^∞ 級の（境界のない）**正則な曲線**[†2]であるとは，L の各点 p について，ある $\delta>0,\ r>0$ と $(-\delta,\delta)$ 上定義された C^∞ 級の正則な曲線 $l\colon U\to\mathbb{R}^2$ が存在して $l(0)=p$ かつ $l((-\delta,\delta))=L\cap B_p(r)$ が成り立つことを言う．ここで $B_p(r)$ は p を中心とする半径 r の開球である．以下では，このような l を p の近傍で L を表す（正則な）曲線と呼ぶことにする．また，曲線は正則なもののみを考える．

4) $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 L, L' が p において**交わる**とは $p\in L\cap L'$ が成り立つことを言う．$\mathbb{R}^2$ 内の正則な曲線 l, l' が p で**交わる**とは $p=l(t_0)=l'(t_1)$ がある t_0, t_1 について成り立つことを言う（このとき，$l_1(t)=l(t-t_1+t_0)$ とすれば，l_1 も $l(\mathbb{R})$ を表す曲線であって，$p=l_1(t_1)=l'(t_1)$ が成り立つ）．

5) L, L' が p において交わるとする．l, l' をそれぞれ p の近傍で L, L' を表す曲線とするとき，l と l' が p において接するとき，L と L' は p において**接する**と言う．

問 4.6. 1) C を $\mathbb{R}^2$ 内の円周とする．C は定義 4.5 の 3) の意味での曲線であることを示せ．

2) L, L' を $\mathbb{R}^2$ 内の曲線とする．定義 4.5 の 5) では正則な曲線を選んでいるが，ほかの正則な曲線，例えば l_1, l_1' を選んでも l_1 と l_1' は p において接することを示せ．従って定義 4.5 の 5) において l, l' の選び方は L と L' が接するか否かには影響しない．

問 4.7. $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を $\mathbb{R}^2$ の標準的な内積とする．また，l を $\mathbb{R}$ 上定義された C^∞ 級の正則な曲線とする．

1) $f(t)=\|Dl(t)\|$ と置く．$Df(t)$ を $Dl(t)$ と $D^2l(t)$，$\langle\cdot|\cdot\rangle$ を用いて表せ．

以下では $\forall t\in\mathbb{R},\ \|Dl(t)\|=1$ が成り立つ（l は弧長をパラメータとする，などと言う．定義 4.8 や問 4.9 を参照のこと）．

2) $D^2l(t)$ は $Dl(t)$ と直交する（内積が 0 になる）ことを示せ．

3) $D^2l(t)\neq 0$ とし，$r=\dfrac{1}{\|D^2l(t)\|}$ と置く．$p=l(t),\ q=p+r\dfrac{D^2l(t)}{\|D^2l(t)\|}$ とすると，q を中心（**曲率中心**と呼ぶ）とする半径 r の円（**曲率円**と呼ぶ）は p において l（で

[†2] 曲線の定義は正則でないものも含めいくつか存在する．ここでの定義はあまり一般的ではないが，一般的な定義の一つと同値である．

表される曲線）と接することを示せ．r を l の p における**曲率半径**と呼ぶ．また，$\det(Dl(t)\ D^2l(t))$ が正の値であれば $\|D^2l(t)\|$ を，負の値であれば $-\|D^2l(t)\|$ を l の p における**曲率**と呼ぶ．

4) $r > 0$ とし，$l(t) = \begin{pmatrix} r\cos\frac{t}{r} \\ r\sin\frac{t}{r} \end{pmatrix}$ とする．l の $l(t)$ における曲率中心，曲率，曲率半径及び曲率円を求めよ．

定義 4.8. $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を正則な曲線とする．$t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ の時，l の $l(t_0)$ から $l(t_1)$ までの**符号付きの弧長**を $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \|Dl(t)\|\, dt$ により定める[†3]．また，その絶対値を**弧長**と呼ぶ．

問 4.9. $l\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を正則な曲線とする．

1) l が弧長をパラメータとするならば $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ の時 l の $l(t_0)$ から $l(t_1)$ までの符号付きの弧長は $t_1 - t_0$ に等しいことを示せ．

2) $L(t)$ を $l(0)$ から $l(t)$ までの符号付きの弧長とする．L は狭義単調増加であることを示せ．また，L を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像（函数）とみなすと $L(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ が成り立つことを示せ．

3) L は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像として C^∞ 級である．また，L の逆函数を s とすると s は C^∞ 級である（ここまでは認めて良い）．$l \circ s$ は弧長をパラメータとする正則な曲線であることを示せ（ただし,「微積分の基本定理」[†4]は認めて用いて良い）.

4) 3) の記号を用いる．l は正則であるが，必ずしも $\forall t \in \mathbb{R},\ \|Dl(t)\| = 1$ は成り立たないとする．このとき，l の $l(t)$ における曲率を，$l(t) = l \circ s(L(t))$ であることに注意して，$l \circ s$ の $L(t)$ における曲率として定める．このとき，l の $l(t)$ における曲率を Dl と D^2l を用いて表せ（問 4.7 の 1) も参照のこと）.
ヒント：l が弧長をパラメータとするならば曲率は $\dfrac{\det(Dl(t)\ D^2l(t))}{|\det(Dl(t)\ D^2l(t))|}\|D^2l(t)\|$ と表すことができる.

問 4.10. f を次のように定めるとき，Df と $\det Df$ を求めよ．特に，$\det Df \neq 0$ であるための条件も求めよ．また，f が像への全単射であるような定義域を，なるべく大きくなるように一つ定めよ.

1) $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ とし，$f(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ とする．

2) $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ とし，$f(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ とする．

3) $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$ とし，$f(x, y, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$ とする．

[†3]積分は後期に定義するので，今は高校までの意味で考えればよい.
[†4]標語的に言えば微分と積分は逆の操作である，という趣旨の定理.

4) $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^2 = \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ を，$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ について $f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{1+x^2+y^2} \\ \dfrac{2y}{1+x^2+y^2} \\ \dfrac{1-(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} \end{pmatrix}$ と置くことにより定める．この f については $\det Df$ は（定義されないので）求めなくてよい．一方，S^2 の点で f の像に属さない点を（全て）求めよ．

定義 4.11. C^∞ 級の写像 $X\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を，$\mathbb{R}^3$ の各点 p に対して，ベクトル $X(p)$ を与える写像とみなし，$\mathbb{R}^3$ 上の**ベクトル場**と呼ぶ（ベクトル場は多様体と呼ばれる，もっと一般の図形上で考えることができる（この講義では扱わない）．$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場は少し特別で，自然に $\mathbb{R}^3$ への写像とみなすことができるというのが実際のところである）．$X = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ と成分を用いて表し，$\operatorname{rot} X = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$，$\operatorname{div} X = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}$ により定める．また，$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級の函数であるであるとき，ベクトル場 $\operatorname{grad} F$ を $\operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ により定め，F の**勾配ベクトル場**と呼ぶ.

問 4.12. $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$ が成り立つことを示せ．また，$\operatorname{rot} \operatorname{grad} X = 0$ が成り立つことを示せ.

問 4.13. $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．$p \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$ とし，p における v 方向の微分を $D_v F(p)$ で表す．ただし $v \neq 0$ とする．$D_v F(p) = DF(p)v$ が成り立つことに注意して，$\operatorname{grad} F(p) \neq 0$ であれば $\dfrac{|D_v F(p)|}{\|v\|} \leq \dfrac{D_{\operatorname{grad} F(p)} F(p)}{\|\operatorname{grad} F(p)\|}$ が成り立つことを示せ.
ヒント：問 4.2 を用いるのが簡単である．また，$\|\operatorname{grad} F(p)\|$ と $\|DF(p)\|$ には一定の関係がある.

rot や div の説明にはもう少し道具を用意した方がよいので，ここでは扱わない（時間があれば冬学期に扱うかもしれないが，未定である．なお，グリーンの定理やストークスの定理を本格的に扱うのは数理科学 I や III までお預けである）.

（以上）