２０１１年度数学II（理I向け，足助担当）　演習問題 1　　'11/7/4（月）３限
'11/7/5 一部訂正

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 1.1. 1) $A \in M_n(K)$ とし，A は上三角行列であるとする．$\exists k \in \mathbb{N},\ k > 0$ s.t. $A^k = O_n$ が成り立つならば，$A^n = O_n$ が成り立つことを示せ.

2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ であれば，ある $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ について $P^{-1}AP$ は上三角行列である（後期に示す）．$A \in M_n(\mathbb{C})$ について，$\exists k \in \mathbb{N}, k > 0$ s.t. $A^k = O_n$ が成り立つならば，$A^n = O_n$ が成り立つことを示せ.

問 1.2. 次の方程式の解空間を $\{v \in K^n | \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_r,\ v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + v_0\}$ の形に表せ．ただし，n, r や $v_0, v_1, \ldots, v_r$ は問ごとに適宜定めること．また，r はなるべく小さな値となるように定め，なぜその値になるのか理由を述べよ.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$, ただし $a, b \in K$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

問 1.3. 次の連立一次方程式をクラメルの公式を用いる方法と，掃き出しを用いる方法の二通りで解け.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 = 4 \end{cases}$$

問 1.4. 以下の行列の逆行列が存在するかどうか判定し，存在するならばそれを求めよ．また，各々の行列の rank（ランク・階数）を求めよ．

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3+\sqrt{-1} & \sqrt{-1} & 3+3\sqrt{-1} \\ 2 & 0 & 3-3\sqrt{-1} & 9 & 3-3\sqrt{-1} \end{pmatrix}$

問 1.5. $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．

1) A の第 i 行と第 j 行（$i \neq j$）を入れ替えて得られる行列の逆行列を B とする．B と A^{-1} の関係を簡潔に述べよ．
2) 1) の事実を基本行列を用いて表せ（解き方によっては 1) と 2) は同時に解ける）．

問 1.6. $A \in M_n(K)$ とし，$F\colon M_n(K) \to K$ を $X \in M_n(K)$ について $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ と列ベクトルを用いて表し，

$$F(X) = \det(Ax_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) + \det(x_1 \ Ax_2 \ x_3 \ \cdots \ x_n) + \cdots + \det(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_{n-1} \ Ax_n)$$

と置くことにより定める．このとき，$F(X) = (\mathrm{tr}\, A) \det X$ が成り立つことを示せ．ここで $\mathrm{tr}\, A$ は A の対角成分の和である．

$\mathbb{R}^n$ や $M_n(\mathbb{R})$ に値を取る $\mathbb{R}$ 上定義された函数の微分を，成分ごとに一斉に微分を取ることにより定める．なお，ここでは微分可能性に関しては考察しなくて良い．

問 1.7. X を $M_n(\mathbb{R})$ に値を取る $\mathbb{R}$ 上定義された無限階連続微分可能な函数とする．なお，変数は t とする．$X = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ と，$\mathbb{R}^n$ に値をとる無限階連続微分可能な函数 $x_1,\ldots,x_n$ を用いて表したとき，ある $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が存在し，

$$\frac{d}{dt}x_i = Ax_i$$

が全ての i について成り立つとする．ここで $f(t) = \det X(t)$ と定めると $\dfrac{df}{dt}(t) = (\mathrm{tr}\, A) f(t)$ が成り立つことを示せ．

問 1.8. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．$i_1 < i_2 < \cdots < i_r$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ を正の整数とし，A から第 i_1 行，…，第 i_r 行および第 j_1 列，…，第 j_r 列を取り出して（取り去るのではない）得られる $M_r(K)$ の元を $A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r}$ で表す（このような行列を r 次小行列などと呼ぶ）．ある $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ について $\det A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r} \neq 0$ であることと，$\mathrm{rank}\, A \geq r$ であることは同値であることを示せ．

ヒント：基本変形により行列のランクは不変なのであった．

問 1.9. $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$A = (a_1, \ldots, a_n)$ と K^m の元 $a_1, \ldots, a_n$ を用いて表す．$\mathrm{rank}\, A = n-1$ かつ $\mathrm{rank}\,(a_1, \ldots, a_{n-1}) = n-1$ が成り立つならば，適当な $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$ が存在して $a_n = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{n-1} a_{n-1}$ が成り立つことを示せ．

ヒント：例えば $A = (a_1 \ \cdots \ a_{n-1} \,|\, a_n)$ と区分けし次のような右基本変形を考えてみよ．まず A の左側の部分を列階段行列（普段考える階段行列の転置の形をしたもの）に変形し，その上で A 全体を列階段行列に変形する．特に二番目の段階でどのような変形をするのかよく観察してみよ．

問 1.10. $A \in M_n(K)$ とする．A の余因子行列を $\widetilde{A}$ で表す．

1) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であるとき，$\det \widetilde{A}$ を求めよ．
2) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であるとき，$\widetilde{(\widetilde{A})} = (\det A)^{n-2} A$ が成り立つことを示せ．
3) $n > 2$ とする．$A \notin \mathrm{GL}_n(K)$ のとき，$\widetilde{(\widetilde{A})} = O_n$ であることを示せ．

ヒント：（少なくとも）二通りの方針があり得る．例えばまず $\operatorname{rank} A$ により場合分けをする．$\operatorname{rank} A < n-1$ の時には問 1.8 を用いれば $\widetilde{A} = O_n$ であることが容易に示せる．$\operatorname{rank} A = n-1$ の時には問 1.9 と行列式の性質を用いると $\widetilde{A}$ が特別な形をしていることがわかり，$\operatorname{rank} A < n-1$ の場合に帰着できる．あるいは 2) に着目して，まず対応 $A \mapsto \widetilde{(\widetilde{A})}$ が $A \in M_n(K)$ の函数として（つまり n^2 個の変数の函数として）連続であることを示す．一方，任意の $A \in M_n(K)$ についてある正則な行列の列 $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots,}$ であって $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ なるものが存在することを示す．これらのことから主張を示すことができる（多変数の函数の連続性について未習である場合には，後者の方針で厳密に証明するのは難しいので，収束等については今のところはある程度大雑把に議論すればよい）．

問 1.11. $A, X \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$c_0(A) = 1$ とし，$c_1(A), \ldots, c_n(A) \in \mathbb{C}$ を条件

$$\det\left(tE_n + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}A\right) = t^n + c_1(A)t^{n-1} + \cdots + c_n(A)$$

により定める．また，$k < 0$ あるいは $k > n$ であるときには $c_k(A) = 0$ と定める．

1) $c_1(A)$ を $\operatorname{tr} A$ を用いて表せ．また，$c_n(A)$ を $\det A$ を用いて表せ．
2) $A_1 \in M_{n_1}(\mathbb{C})$，$A_2 \in M_{n_2}(\mathbb{C})$ について $A = A_1 \oplus A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$ が成り立つとする．このとき，$c_k(A) = \sum_{i=0}^{k} c_i(A_1)c_{k-i}(A_2)$ が成り立つことを示せ．

問 1.12. $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ について $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}({}^tAA)}$，$\|A\|_\infty = \sqrt{mn}\max_{i,j}|a_{ij}|$ とそれぞれ置く．ここで $\operatorname{tr} X$ は X の対角成分の和を表す．

1) $\|A\|$ を A の成分を用いて表せ．
2) $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$，$\lambda \in \mathbb{R}$ について $\|A+B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$，$\|\lambda A\|_\infty = |\lambda|\,\|A\|_\infty$ が成り立つことを示せ．
3) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ について，$\|A\|_\infty = 0$ であることと，$A = O_{m,n}$ であることは同値であることを示せ．
4) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$，$B \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ について $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$ が成り立つことを示せ．
5) $\|\cdot\|$ について，2) から 4) と同様のことが成り立つことを示せ．

6) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ について，$\dfrac{1}{\sqrt{mn}}\|A\|_\infty \leq \|A\| \leq \|A\|_\infty$ が成り立つことを示せ.

問 1.13. 1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．$\forall \epsilon > 0\ \exists\, X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ s.t. $\|X - A\| < \epsilon$ が成り立つことを示せ.

2) $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\ \exists\, \delta > 0$ s.t. $\|X - A\| < \delta \Rightarrow X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が成り立つことを示せ.

ヒント：2) 3) は最初は上三角行列について考えてみよ.

問 1.14. $A \in M_n(K)$ を $A = \begin{pmatrix} A' & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $A' \in M_{n-1}(K)$ であるように区分けする．$A' \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$ のとき，

$$L = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ c & d' \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} E_{n-1} & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が $A = LU$ を充たすように b'，d' を定めよ.

問 1.15. $A \in M_n(K)$ とする．A の第 1 行から第 k 行，第 1 列から第 k 列までを取り出して得られる行列を $A_k \in M_k(K)$ とする（A_k を第 k 主座小行列（k-th principal minor）と呼ぶ）．もし $A_1, \ldots, A_n (= A)$ が全て正則であるとすると，対角成分が全て 1 であるような上三角行列 U と，正則な下三角行列 L がただ一組存在して $A = LU$ が成り立つことを示せ（例えば以下のように示せる）．これを LU 分解と呼ぶ.

存在の証明.

1) $n = 1$ の時は $U = (1)$, $L = A$ とすればよい.
2) 条件を充たすような n 次以下の行列について分解が存在したとし，$A \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ であって，A も条件を充たすとする．$A = \begin{pmatrix} A' & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $A' \in M_n(K)$ であるように区分けする．$A' = A_n$ なので，仮定から A' は正則である．前問を用いて $A = L_1 U_1$ とすると，L_1 の第 n 主座小行列は帰納法の仮定から LU 分解可能である（証明は必要である）．このことを用いてまず L_1 が LU 分解可能であることを示し，それから A 自身が LU 分解可能であることを示す.

一意性の証明．$A = LU = L'U'$ を共に LU 分解とする．このとき，$L'^{-1}L = U'U^{-1}$ が成り立つ．両辺が共に E_n に等しいことを $L'^{-1}L$, $U'U^{-1}$ の形に着目して示す.

問 1.16. 以下の行列のそれぞれについて，LU 分解を求めよ.

$$1) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \\ -1 & 6 & 11 \end{pmatrix} \qquad 3) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

（以上）