２０１０年度数学 II 演習（理 I 向け，足助担当）　第９回　　'10/11/16（火）４限
'10/11/29（月）４限
'10/11/16 訂正

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 9.1. K^n の標準計量は計量であることを示せ．また，K^n の標準基底は標準計量に関する正規直交基底であることを示せ.

問 9.2.

$$V = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は } C^\infty \text{ 級}, \\ \exists\, M > 0 \text{ s.t. } |x| > M \Rightarrow f(x) = 0 \end{array} \right\}$$

と置く．$f, g \in V$ について

$$\langle f \,|\, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

と置くと，$\langle \cdot | \cdot \rangle$ は V のユークリッド計量であることを示せ（講義では $\dim V$ が有限の時にしか計量を定義しなかったが，今の場合にもまったく同じ条件で定まると考えて良い）.

問 9.3. $\mathbb{R}_2[x] = \{$ 高々 2 次の x に関する実係数多項式全体 $\}$ の元 f, g について

$$\langle f \,|\, g \rangle = f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + \frac{1}{4} f''(0)g''(0)$$

と置く.

1) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}_2[x]$ の（ユークリッド）計量であることを示せ.
2) $f(x) = 1 + x^2$ とする．$\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関して，f と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす $\mathbb{R}_2[x]$ の元を全て求めよ.

問 9.4. $A, B \in M_{m,n}(K)$ の時，$\langle A | B \rangle = \operatorname{tr} A^* B$ と置く.

1) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は $M_{m,n}(K)$ の計量であることを示せ.
2) $f\colon M_{m,n}(K) \to K^{mn}$ を $A = (a_1 \ \cdots \ a_n)$，$a_i \in K^m$，の時

$$f(A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^{mn}$$

により定める．K^{mn} に標準計量を入れると f は計量同型写像であることを示せ.

3) $E_{ij} \in M_{m,n}(K)$ を (i, j)-成分が 1 で，そのほかの成分が全て 0 であるような行列とする．$\mathscr{E} = \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn}\}$ とすると $\mathscr{E}$ は $M_{m,n}(K)$ の正規直交基底であることを示せ.
4) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ から定まるノルムを $\| \cdot \|$ で表す．このとき $\|A\|$ を A の成分で表せ.
5) $A \in M_m(K)$ のとき $f\colon M_{m,n}(K) \to M_{m,n}(K)$ を $f(X) = AX$ により定める．f は K-線型写像であることを示し，$\mathscr{E}$ に関する f の表現行列を求めよ.

6) $B \in M_n(K)$ のとき $g\colon M_{m,n}(K) \to M_{m,n}(K)$ を $g(X) = XB$ により定める．g は K-線型写像であることを示し, $\mathscr{E}$ に関する g の表現行列を求めよ．

7) f, g の随伴写像を求めよ．

8) K^m, K^n に標準計量を与える．$F(v) = Av$ で定まる K^m から K^m への写像が等長写像であれば f も等長写像であることを示せ．また，$G(w) = Bw$ で定まる K^n から K^n への写像が等長写像であれば g も等長写像であることを示せ．

9) $A \in M_m(K)$ とし，5) で求めた f の表現行列を A' とする．A が正則であれば A' も正則であることを示せ．また，$B \in M_n(K)$ に対して 6) で求めた g の表現行列を B' とする．B が正則であれば B' も正則であることを示せ．

ヒント：A' が正則であることが f のどのような（写像としての）性質に対応するのか考えてみよ．

10) $A \in M_m(K)$, $B \in M_n(K)$ に対して 5) で求めた f の表現行列を A', 6) で求めた g の表現行列を B' とすると $A'B' = B'A'$ が成り立つことを示せ．

ヒント：$A'B' = B'A'$ が成り立つことが f と g のどのような（写像としての）性質に対応するのか考えてみよ．

問 9.5. 1) から 4) の V とその基底に関して以下の作業をせよ．

a) V に標準計量を与えたとき，それぞれの基底をグラム–シュミットの直交化法を用いて正規直交化せよ．また，元の基底から正規直交化した基底への変換行列を求めよ．

b) 与えられた基底が正規直交基底となるような V の計量 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を求め, $G = (g_{ij})$, $g_{ij} = \langle e_i \,|\, e_j\rangle$, により定まる行列 G を求めよ．ただし $\{e_1, \ldots, e_n\}$ は K^n の標準基底である．

1) $V = \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

2) $V = \mathbb{C}^2, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

3) $V = \mathbb{R}^3, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

4) $V = \mathbb{C}^3, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

問 9.6. K^n の部分線型空間 V を 1) から 4) のように定め，それぞれ K^n の標準計量から定まる計量を与える．このとき V の正規直交基底を一組求めよ．

ヒント：たとえばまず V の基底を一組求め，グラム–シュミットの直交化法を用いて正規直交化することにより求めることができる．

1) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

2) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

3) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

4) $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{C}^3$.
ただし，$K = \mathbb{C}$ とする．

問 9.7 (問 9.4 も参照のこと)．$M_n(K)$ の計量 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を $A, B \in M_n(K)$ について $\langle A \,|\, B \rangle = \operatorname{tr} A^* B$ と置くことにより定める．

1) $\mathfrak{o}_n(K)$ は $M_n(K)$ の部分線型空間であることを示し，$\mathfrak{o}_n(K)$ の正規直交基底を一組求めよ．
2) 1) で求めた正規直交基底の拡大となっている $M_n(K)$ の正規直交基底を一組求めよ．
3) $\mathfrak{o}_n(K)$ の $M_n(K)$ における直交補空間を求めよ．

問 9.8. $V = \mathbb{R}[x]$ とする．また，$\varphi, \psi \in V$ とし, $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i$, $\psi(x) = \sum_{i=0}^{s} b_i x^i$ とする．

1) φ, ψ について
$$\langle \varphi \,|\, \psi \rangle = \sum_{i=0}^{\max\{r,s\}} a_i b_i$$
と定めると, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は V の計量であることを示せ．
2) 上の式で $\max\{r, s\}$ を $\min\{r, s\}$ に置き換えても同じ計量を与えることを示せ．
3) $f \colon V \to V$ を
$$f(\varphi)(x) = x\varphi(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^{i+1} = \sum_{i=1}^{r+1} a_{i-1} x^i$$
により定めると f は V の計量を保つことを示せ．
4)
$$\langle \varphi \,|\, f(\psi) \rangle = \sum_{i=1}^{\max\{r,s+1\}} a_i b_{i-1}$$
が成り立つことを示し，また,
$$f^*(\varphi)(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi_0}{x}$$
が成り立つことを示せ．
5) $f^* \circ f = \mathrm{id}_V$ が成り立つことを示せ．また，$f \circ f^* \neq \mathrm{id}_V$ が成り立つことを示せ．

問 9.9. 1) $\mathrm{O}_n(K) \subset \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことを示せ．また，$A, B \in \mathrm{O}_n(K)$ とすると $AB \in \mathrm{O}_n(K)$，$A^{-1} \in \mathrm{O}_n(K)$ が成り立つことを示せ．加えて $E_n \in \mathrm{O}_n(K)$ が成り立つことを示せ．

2) 1) で $\mathrm{O}_n(K)$ を U_n としても同様のことが成り立つことを示せ（ただし，$K = \mathbb{C}$ とする）．

3) $n \geq 2$ とする．n 次の対称行列 A, B であって，AB が対称行列ではないようなものが存在することを反例を挙げることにより示せ．一方，A が正則な対称行列であれば A^{-1} も対称行列であることを示せ．

4) $n \geq 2$ とする．n 次のエルミート行列 A, B であって，AB がエルミート行列ではないようなものが存在することを反例を挙げることにより示せ．一方，A が正則なエルミート行列であれば A^{-1} もエルミート行列であることを示せ．

問 9.9 の 1)，2) は $\mathrm{O}_n(K)$ や U_n は $\mathrm{GL}_n(K)$ と似た性質を持つことを示している．一方 3)，4) は対称行列全体や，エルミート行列全体のなす集合は行列の積に関して閉じていないことを示している．

問 9.10. 1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．$A = X + Y$ が成り立つような実対称行列 X 実歪対称行列 Y がそれぞれただ一つ存在することを示せ．

2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$A = X + Y$ が成り立つようなエルミート行列 X と歪エルミート行列 Y がそれぞれただ一つ存在することを示せ．

3) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$A = X + Y$ が成り立つような複素対称行列 X と複素歪対称行列 Y がそれぞれただ一つ存在することを示せ．

注 9.11. 問 9.10 の 2)，3) はそれぞれ実行列に関する主張 1) の，複素行列に関する主張への拡張と考えることができる．問 9.9 の 1)，2) についても同様である．このような拡張に際して考え方が（少なくとも）二通りあることをこれらの問は示している．実線型空間のユークリッド計量に関する主張は実対称行列や実歪対称行列を用いて表されることが多いが，このような主張を複素線型空間に関わる主張に書き換えようとすると同様のことが起きる．2) の場合にあたるのは，このような主張をエルミート計量に関する主張に書き換える場合であって，エルミート行列や歪エルミート行列が現れる．これは計量の条件に複素共役が現れることに由来する．3) の場合にあたるのは，対称双一次形式に関する主張に書き換える場合である．対称双一次形式というのは，計量の条件に現れる複素共役に関する条件を無視し（従って計量であることは諦め），複素線型空間においてもユークリッド計量に関するものと同様の条件を考えたものである（詳しくは後日扱う）．対称双一次形式を扱うと（複素共役は関係ないので）複素対称行列や複素歪対称行列が現れる．

このように二通りの拡張が現れるのは，ユークリッド計量が計量であって，かつ対称双一次形式であるからである．前者の性質に着目するとエルミート計量が，後者の性質に着目すると（複素線型空間上の）対称双一次形式が現れる．

定義. $X \in M_n(K)$ とする．このとき

$$\exp X = E_n + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n$$

と置き，$\exp\colon M_n(K) \to \mathrm{GL}_n(K)$ を（行列の）指数函数・指数写像と呼ぶ．本来は級数の収束は確かめなければいけないことであるがここでは認める．

定義から $\exp {}^tX = {}^t\exp X$，$\exp X^* = (\exp X)^*$ が成り立つことがわかる．また，$\exp \overline{X} = \overline{\exp X}$ が成り立つ．

以下の問については，収束などについてもきちんと議論をした証明ができればそれに越したことはないが，ここでは形式的に計算すればよい．

問 9.12. $X, Y \in M_n(K)$ が $XY = YX$ を充たせば

$$\exp(X+Y) = (\exp X)(\exp Y) = (\exp Y)(\exp X)$$

が成り立つことを示せ．また $\exp(X+Y)$，$(\exp X)(\exp Y)$，$(\exp Y)(\exp X)$ のいずれも相異なるような $X, Y \in M_n(K)$ の例を挙げよ．

問 9.13. $X \in M_n(K)$ とする．$\exp X \in \mathrm{GL}_n(K)$，より詳しく $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$ が成り立つことを示せ．

問 9.14. 1) $X \in \mathfrak{o}_n(K)$ とすると $\exp X \in \mathrm{O}_n(K)$ が成り立つことを示せ．

2) $X \in \mathfrak{u}_n$ とすると $\exp X \in \mathrm{U}_n$ が成り立つことを示せ．

3) X が対称行列であれば $\exp X$ も対称行列であることを示せ．

4) X がエルミート行列であれば $\exp X$ もエルミート行列であることを示せ．

定義. $F(t)$ が $M_n(K)$ に値をとる実数 t に関する函数であるとする．つまり，$t \in \mathbb{R}$ であれば $F(t) \in M_n(K)$ であるとする．$F(t)$ の (i,j)-成分を $f_{ij}(t)$ として，これを t の函数とみなす．全ての f_{ij} が無限階連続微分可能な時，F は無限階連続微分可能であると定め，F の t に関する微分を成分ごとに微分することにより定める．

問 9.15. $A \in M_n(K)$，$t \in \mathbb{R}$ の時 $F(t) = \exp tA$ と置く（定義自体は $t \in \mathbb{C}$ でもできる）．F は $\mathrm{GL}_n(K)$ に値を取る函数である．$\dfrac{dF}{dt}(t) = A\exp tA = (\exp tA)A$ が成り立つことを示せ（実は F は複素数を変数とする函数であって，上の微分は複素数に関する微分であると考えることもできる）．

問 9.16 (問 9.6 も参照せよ). f_1, f_2, f_3 を実数 t に関する微分可能な実数値函数とする（複素数値でも本当は構わない）．連立微分方程式

$$\frac{df_1}{dt} = 3f_1,$$
$$\frac{df_2}{dt} = f_1 + 2f_2,$$
$$\frac{df_3}{dt} = f_1 + 3f_2 - f_3$$

を次の方針で解け（一般解を求めよ）．

1) $\mathbb{R}^3$ 値函数 F を $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ により定める．$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ と置くと $\dfrac{dF}{dt} = AF$ が成り立つことを示す.

2) 適当な $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になることを示す．この対角行列を B とする.

   ヒント：$P = (p_1\ p_2\ p_3)$ $(p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^3)$，$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ とすると，$P^{-1}AP = B$ は $AP = (\lambda_1 p_1\ \lambda_2 p_2\ \lambda_3 p_3)$ と同値であることをまず示してみよ.

3) $\mathbb{R}^3$ 値函数 G を $G(t) = P^{-1}F(t)$ により定めると $\dfrac{dG}{dt} = BG$ が成り立つことを示す.

4) G の各成分に関する微分方程式は簡単に解けるので解く.

5) $F = PG$ が成り立つことを用いて F を決定する.

なお，この微分方程式はいわゆる定数変化法でも比較的容易に解くことができる．興味があれば試みよ.

（以上）