２０１０年度数学II演習（理I向け，足助担当）　第８回　'10/11/2（火）４限
'10/11/8（月）４限
'10/11/5 細かい文言を一部訂正

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 8.1. 1) $f\colon K^8 \to K^3$ を

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 \\ x_5 + 2x_6 + x_8 \end{pmatrix}$$

により定める．$\operatorname{Ker} f$ および $\operatorname{Im} f$ を決定し，それぞれの次元を求めよ.

2) $g\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^3$ を

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \sqrt{-1}x_3 + x_5 \\ x_2 - 2x_3 \\ x_4 - 3\sqrt{-1}x_5 \end{pmatrix}$$

により定める．$\operatorname{Ker} g$ および $\operatorname{Im} g$ を決定し，それぞれの次元を求めよ.

問 8.2 (問 7.1 も参照のこと)**.** 次のベクトルの組が生成する V の部分線型空間を W とする．W の（K 上の）基底を一組求めよ．また，もし $W \neq V$ である時には求めた W の基底の拡大（延長）となっている V の基底を一組求めよ.

1) $V = K^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $V = K^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) $V = K^4$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4) $K = \mathbb{C}$，$V = \mathbb{C}^4$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{-1} \\ 0 \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

問 8.3. $f\colon K^n \to K^m$ を線型写像とする．

1) $n > m$ とすると，$\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ が成り立つことを示せ．すなわち f は単射でない．
2) $n < m$ とすると，$\operatorname{Im} f \neq K^m$ が成り立つことを示せ．すなわち f は全射でない．

問 8.4 (問 7.5 および講義中の問 5.1.17 も参照のこと)**.** V, W を K-線型空間，$f\colon V \to W$ を K-線型同型写像とする．$\{v_1, \ldots, v_n\}$ が V の基底であることと，$\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ が W の基底であることは同値であることを示せ．

※ 従って V が K^n に同型な線型空間であれば，V には n 個の元からなる基底が存在する．

問 8.5. V, W を K-線型空間とし，$\dim V = n$, $\dim W = m$ とする．V と W が K-線型同型であれば $n = m$ が成り立つことを次の要領で示せ．

1) 線型同型写像 $f\colon K^n \to V$，$g\colon K^m \to W$ が存在することを示す．
2) $\varphi\colon V \to W$ を線型同型写像とする．$g^{-1} \circ \varphi \circ f\colon K^n \to K^m$ は線型同型写像であることを示す．
3) $n = m$ が成り立つことを示す．

問 8.6 (やや難しい)**.** $V = \mathbb{R}[x]$ とし，V の部分線型空間 W, U を

$$W = \{f \in V \mid f(-x) = f(x)\},$$
$$U = \{f \in V \mid f(-x) = -f(x)\}$$

により定める．

1) $V \neq W$ であるが，V と W は線型同型であることを示せ．
2) W と U は線型同型であって，また，$V = W \oplus U$ が成り立つことを示せ．

※ V が有限次元でないとこのように直感に反することが起きることがある．

問 8.7. $A \in M_n(K)$ とし，列ベクトルを用いて $A = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ と表す．また，$f\colon K^n \to K^n$ を $f(v) = Av$ により定める．

1) $v \in K^n$ の時 $A_i = (a_1 \ \cdots \ a_{i-1} \ v \ a_{i+1} \ \cdots a_n)$ と置く．$g\colon K^n \to K^n$ を
$$g(v) = \begin{pmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{pmatrix}$$
により定めると，g は線型写像であって，その（K^n の標準基底に関する）表現行列は A の余因子行列であることを示せ．
2) $g \circ f$ および $f \circ g$ を求めよ．

問 8.8. 以下のように線型空間 V, W と，V から W への線型写像 f を与える．このとき適当に V, W の基底を選んで f を行列表示せよ．また，f が線型同型写像であるかどうか判定し，線型同型写像である場合には逆写像を求めよ．

1) $V = W = M_2(K)$ とし $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_2(K)$ を一つ固定する．
   f は $f(X) = AXA^{-1}$ により定める．
2) $V = W = M_2(K)$ とし $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_2(K)$ を一つ固定する．
   f は $f(X) = AX - XA$ により定める．
3) $V = K_2[t], W = K$ とする．f は $f(\varphi) = \varphi(0)$ により定める．
4) $V = K_2[t], W = K^3$ とする．f は
$$f(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi'(0) \\ \dfrac{1}{2}\varphi''(0) \end{pmatrix}$$
   により定める．

問 8.9. $V = \mathbb{R}_3[t]$ とし，$\mathscr{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$，$\mathscr{F} = \{t^3,\ t^3 + t^2,\ t^3 + t^2 + t,\ t^3 + t^2 + t + 1\}$，$\mathscr{G} = \{(t+1)^3,\ (t+1)^2,\ t+1,\ t\}$ とする．

1) $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ はそれぞれ V の基底であることを示せ．
2) $\mathscr{E}$ から $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ から $\mathscr{G}$, $\mathscr{E}$ から $\mathscr{G}$ への基底の変換行列をそれぞれ求め，適宜比較せよ．

問 8.10. $A \in M_n(K)$ とし，$f\colon K^n \to K^n$ を $f(v) = Av$ により定める．また，$\lambda \in K$ とする．

1) $v \in K^n$，$v \neq 0$，について $f(v) = \lambda v$ が成り立つとすると $\det(\lambda E_n - A) = 0$ が成り立つことを示せ．
2) $\det(\lambda E_n - A) = 0$ が成り立てば，ある $v \in K^n$，$v \neq 0$，について $f(v) = \lambda v$ が成り立つことを示せ．

ヒント：$f(v) = Av$, $\lambda v = \lambda E_n v$ だから，$f(v) = \lambda v$ であれば $Av = \lambda E_n v$ である．従って $(\lambda E_n - A)v = 0$ が成り立つ．

問 8.11 (問 8.10 も参照のこと). $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ とし, $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(v) = Av$ により定める.

1) $Av = \lambda v$ が成り立つような $v \in \mathbb{R}^3$ が存在するような λ の値を全て求めよ.
2) $Av_1 = -v_1$ を充たす $v_1 \neq 0$ を一つ求めよ.
3) $Av_2 = 2v_2$ を充たす $v_2 \neq 0$ を一つ求めよ.
4) $Av_3 = 3v_3$ を充たす $v_3 \neq 0$ を一つ求めよ.
5) $\{v_1, v_2, v_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.
6) 基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ に関する f の表現行列を求めよ.

（以上）