２０１０年度数学 II 演習（理 I 向け）　第６回　　'10/6/28（月）４限
'10/6/29（火）４限

以下では特に断らなければ K は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 6.1. 1) $A \in M_n(\mathbb{R})$ が $A\,{}^tA = E_n$ をみたすとすると，A は正則であって，$\det A = \pm 1$ が成り立つことを示せ.
2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ が $A\,\overline{{}^tA} = E_n$ をみたすとすると，A は正則であって，$|\det A| = 1$ が成り立つことを示せ.

問 6.2. $m < n$ とし，$A \in M_{m,n}(K)$ とする．$\det {}^tAA = 0$ が成り立つことを示せ．また，$\det A\,{}^tA \neq 0$ が成り立つような A の例を挙げよ.

問 6.3. V を K-線型空間とする.

$$V^* = \{ f \colon V \to K \mid f \text{ は } K\text{-線型写像} \}$$

と置く.

1) $f, g \in V^*$ とする．$f + g \colon V \to K$ を $v \in V$ に対して

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$$

により定めると $f + g \in V^*$ が成り立つことを示せ.

2) $f \in V^*$，$\lambda \in K$ とする．$\lambda f \colon V \to K$ を $v \in V$ に対して

$$\lambda f(v) = \lambda(f(v))$$

により定めると $\lambda f \in V^*$ が成り立つことを示せ.

3) 上の演算に関して V^* は K-線型空間であることを示せ.

V^* を V の双対（そうつい）空間と呼ぶ．双対空間を $V^\vee$ 等で表すこともある.

問 6.4. V, W を K-線型空間，$f \colon V \to W$ を K-線型写像とする.

1) $g \in W^*$ の時，$f^*(g)$ を

$$f^*(g)(v) = g(f(v)),\ v \in V$$

により定めると，$f^*(g) \in V^*$ が成り立つことを示せ．しばしば $f^*(g)$ を単に f^*g で表す.

2) $f^* \colon W^* \to V^*$ は K-線型写像であることを示せ.

問 6.5. $e_1, \ldots, e_n$ を K^n の基本ベクトルとし，線型写像 $\epsilon^i \colon K^n \to K$ を条件

$$\epsilon^i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

により定める.

1) ϵ^i は確かに定まることを示せ．また，$\epsilon^i \in (K^n)^*$ であることを確かめよ．

2) $f\colon K^n \to K^m$ を K-線型写像とする．$v \in K^n$ の時，$f(v)$ の第 i 成分を $f_i(v)$ で表すと，$f_i\colon K^n \to K$ は K-線型写像であることを示せ.

3) f が与えられると，K の元 a_{ij}，$1 \leq i \leq m$，$1 \leq j \leq n$ が一意的に定まり，$\forall v \in K^n$, $f_i(v) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\epsilon^i(v)$ が成り立つことを示せ（言い換えれば，$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\epsilon^i$ が成り立つということである）.

4) $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ とすると，A は f の表現行列であることを示せ.

問 6.6. $t_1, t_2, t_3, t_4 \in K$ とし，K^4 の元 a_1, a_2, a_3 を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$$

により定める．また，$A = (a_1\ a_2\ a_3)$ と置く.

1) $V = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ と置くと，$V = \{w \in K^4 \mid \exists v \in K^3,\ w = Av\}$ が成り立つことを示せ.

2) A' を A を右基本変形して得られる行列とすると，$V = \{w \in K^4 \mid \exists v \in K^3,\ w = A'v\}$ が成り立つことを示せ.

3) $\dim V = \operatorname{rank}(a_1\ a_2\ a_3)$ が成り立つことを示せ．また，この等しい値を求めよ.

4) V を簡潔に表せ.

問 6.7. $K[x]$ を x に関する K-係数の多項式全体のなす K-線型空間とする．即ち，

$$K[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, \cdots, a_n \in K\}$$

と置く．$f, g \in K[x]$ の時，$f + g$ は f と g の，次数が等しい項の係数同士を加えて得られ，また，$f \in K[x]$，$\lambda \in K$ の時，λf は f の各項を一斉に λ 倍して得られるのであった．ここで $f, g \in K[x]$ の時，$f +' g$ を函数としての f と g の和として定める．即ち，$f +' g$ を

$$(f +' g)(x) = f(x) + g(x)$$

であるような函数として定める．このとき，$f +' g = f + g$ が成り立つことを示せ．また，同様に $f \in K[x]$，$\lambda \in K$ の時 $\lambda \times' f$ を函数としての f と λ の積として定める．即ち，$\lambda \times' f$ を

$$(\lambda \times' f)(x) = \lambda f(x)$$

であるような函数として定める．すると $\lambda \times' f = \lambda f$ が成り立つことを示せ.

注：$+'$ や $\times'$ という記号は勿論ここだけの記号であって，通常は用いない.

問 6.8. $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $f(z)=\bar{z}$ により定める．$\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$-線型空間とみなした時，f は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ．また，$\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$-線型空間とみなした時，f は $\mathbb{C}$-線型写像ではないことを示せ．

問 6.9. 1) $f\colon K^{n+1}\to K_n[x]$ を

$$f\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

により定めると f は K-線型同型写像であることを示せ．また，f の逆写像を求めよ．

2) $g\colon K^{n+1}\to K_n[x]$ を

$$g\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+\cdots+(a_0+\cdots+a_n)x^n$$

により定めると g は K-線型同型写像であることを示せ．また，g の逆写像を求めよ．

問 6.10. 線型写像 $\varphi : K^2\to K^3$, $\psi : K^3\to K^3$ をそれぞれ

$$\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+3y\\-x+y\\y\end{pmatrix},\quad \psi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z\\2x+y-3z\\x-y\end{pmatrix}$$

により定める．

1) $\psi\circ\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を具体的に計算し，表現行列を求めよ．
2) $\psi\circ\varphi$，φ，ψ の表現行列をそれぞれ A,B,C とする．A,B,C を求め，$A=CB$ が成り立つことを確かめよ．

問 6.11. $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ のとき $f(v)=\begin{pmatrix}x^n+y+z\\x+y\end{pmatrix}$ として定める．ただし n は正の整数であるとする．f が線型写像であることと $n=1$ であることは同値であることを示せ．

問 6.12. 1) 線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ は線型同型写像になりえないことを示せ．

注：次元の話に持ち込んでしまえばすぐに示せるが，上の主張を示すだけであれば次元に関する知識は必ずしも必要ない．例えば一次方程式の話に持ち込むこともできるし，あるいは次のように考えることもできる．φ が線型同型写像であると仮定し，$t=\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$s=\varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ とおく．t や s が実数であることに注意すると，$\varphi^{-1}(t)$ と $\varphi^{-1}(s)$ は本来持つはずのない性質を持つことがわかる（議論の仕方によっては一次方程式の話に持ち込むのとほぼ同じことになる）．

2) $n>m$ とし，$f\colon K^n\to K^m$ を線型写像とすると f は単射でないことを示せ．

3) $n < m$ とし，$f\colon K^n \to K^m$ を線型写像とすると f は全射でないことを示せ．

問 6.13. $\mathbb{R}^3$ の元 v_1, v_2, v_3 について，条件

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を充たす $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線型写像について考える．

1) 以下のように v_1, v_2, v_3 を定める時，上の条件を充たす f が存在するならばそれを求め，存在しないのであればそのことを示せ．

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

2) $A = (v_1\ v_2\ v_3)$ とする．上の条件を充たす f が存在することと，A が正則であることは同値であることを示せ．また，A が正則な時に上の条件を充たす f の表現行列を A を用いて表せ．

問 6.14. $f \in \mathbb{R}_n[x]$ に対して $\varphi(f) \in \mathbb{R}_{2n}[x]$ を条件

$$\varphi(f)(x) = f(x^2)$$

により定める．

1) φ を $\mathbb{R}_n[x]$ から $\mathbb{R}_{2n}[x]$ への写像とみなすと φ は線型写像であることを示せ．
2) φ は単射であることを示せ．
3) 線型写像 $\psi\colon \mathbb{R}_{2n}[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ であって $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[x]}$ が成り立つようなものを一つ求めよ．また，そのような ψ について $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{2n}[x]}$ が成り立つかどうか調べよ．

問 6.15. 1) $f\colon K^8 \to K^3$ を

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 \\ x_5 + 2x_6 + x_8 \end{pmatrix}$$

により定め，

$$V = \operatorname{Ker} f = \left\{ v \in K^8 \mid f(v) = 0 \right\},$$
$$W = \operatorname{Im} f = \left\{ w \in K^3 \mid \exists v \in K^8,\ w = f(v) \right\}$$

と置く．このとき，V と W を簡潔に表し，それぞれの次元を求めよ．

2) $g\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^3$ を

$$g\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+\sqrt{-1}x_3+x_5\\x_2-2x_3\\x_4-3\sqrt{-1}x_5\end{pmatrix}$$

により定め，V，W も 1) と同様に定める．このとき，V と W を簡潔に表し，それぞれの次元を求めよ．

問 6.16. V, W, U を K-線型空間とし，$f\colon V \to W$，$g\colon W \to U$ を K-線型写像とすると，次が成り立つことを示せ．

1) $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g \circ f = f^{-1}(\operatorname{Ker} g)$.
2) $\operatorname{Im} g \circ f = g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} g$.

また，包含関係について等号が成り立たない例を挙げよ．

問 6.17. V, W を線型空間とし，U_1, U_2 を V の部分線型空間とする．また，$f_1\colon U_1 \to W$，$f_2\colon U_2 \to W$ をそれぞれ線型写像とする．

1) $V = U_1 \oplus U_2$ と直和分解されているとする．$v \in V$ の時 $v = u_1 + u_2$，但し $u_1 \in U_1$，$u_2 \in U_2$ と表して

$$f(v) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

と置けば f は V から W への写像としてきちんと定まっていて（well-defined であるなどという），さらに線型写像であることを示せ．

2) 単に $V = U_1 + U_2$ であるとしても，必ずしも上の式で f をきちんと定めることができない．このような例を挙げよ．

問 6.18. 1) $t_1, t_2, t_3 \in K$ とし，K^3 の部分線型空間 W_1，W_2 をそれぞれ

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix} \right\rangle$$

により定める．$W_1 + W_2$ が直和であるための t_1, t_2, t_3 に関する条件を求めよ．また，このとき $K^3 = W_1 \oplus W_2 (= W_1 + W_2)$ が成り立つことを示せ．

2) $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \in K$ とし，K^5 の部分線型空間 W_1，W_2，W_3 をそれぞれ

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \quad W_3 \left\langle \begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\\t_4\\t_5\end{pmatrix} \right\rangle$$

により定める．$W_1 + W_2 + W_3$ が直和であるための t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 に関する条件を求めよ．また，このとき和空間を簡潔に表せ．

定義. f を $\mathbb{R}$ 上定義された実数値函数とする．f が奇函数であるとは任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(-x) = -f(x)$ が成り立つことをいい，また，f が偶函数であるとは任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(-x) = f(x)$ が成り立つことをいう.

問 6.19. $V = \mathbb{R}[x]$ とし，$W_1 = \{f \in V \mid f \text{ は奇函数}\}$，$W_2 = \{f \in V \mid f \text{ は偶函数}\}$ と置く.

1) W_1 と W_2 は共に V の部分線型空間であることを示せ.
2) $V = W_1 \oplus W_2$ が成り立つことを示せ.
3) $V = W_1 \oplus W_2$ であるから，$f \in V$ の時，$g \in W_1$ と $h \in W_2$ がそれぞれ唯一つ存在して $f = g + h$ が成り立つ．g と h を f を用いて簡潔に表せ.
   注：2) の解き方によってはこちらも同時に解けてしまう.
4) $V = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^\infty \text{ 級}\}$ とすると 1)〜3) はどうなるか調べよ.

（以上）