２０１０年度数学II演習（理I向け）　第４回　　　　　　'10/5/31（月）４限
'10/6/1　（火）４限

以下では特に断らなければ K は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 4.1. 次の行列はいずれも正則である．各々の行列について，i) 逆行列を求め，ii) 基本行列の積として表し，iii) 行列式を求めよ．なお，作業の仕方によっては必ずしも i) ii) iii) の順序で解けるわけではないことに留意せよ.

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 10 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 2-\sqrt{-1} & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4-3\sqrt{-1} & -1+4\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

問 4.2. $A \in M_n(K)$ とする．左右の基本変形により A を変形したとき，行列式がどのように変化するか調べよ.

問 4.3. 以下の行列の各々について, その行列式と逆行列を求めよ.

$$1)\ \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \qquad 3)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

問 4.4. 次の連立一次方程式をクラメルの公式を用いる方法と，掃き出しを用いる方法の二通りで解け.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 = 4 \end{cases}$$

問 4.5. $A \in M_n(K)$ とし，$F\colon M_n(K) \to K$ を $X \in M_n(K)$ について $X = (x_1\ \cdots\ x_n)$ と列ベクトルを用いて表し，

$$F(X) = \det(Ax_1\ x_2\ \cdots\ x_n) + \det(x_1\ Ax_2\ x_3\ \cdots\ x_n) + \cdots + \det(x_1\ x_2\ \cdots\ x_{n-1}\ Ax_n)$$

と置くことにより定める．このとき，$F(X) = (\operatorname{tr} A)\det X$ が成り立つことを示せ．ただし，$\operatorname{tr} A$ は A の対角成分の和である.

$\mathbb{R}^n$ や $M_n(\mathbb{R})$ に値を取る $\mathbb{R}$ 上定義された函数の微分を，成分ごとに一斉に微分を取ることにより定める．なお，ここでは微分可能性に関しては考察しなくて良い.

問 4.6. X を $M_n(\mathbb{R})$ に値を取る $\mathbb{R}$ 上定義された無限階連続微分可能な函数とする．なお，変数は t とする．$X=(x_1 \cdots x_n)$ と，$\mathbb{R}^n$ に値をとる無限階連続微分可能な函数 $x_1,\ldots,x_n$ を用いて表したとき，ある $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が存在し，

$$\frac{d}{dt}x_i = Ax_i$$

が全ての i について成り立つとする．ここで $f(t) = \det X(t)$ と定めると $\dfrac{df}{dt}(t) = (\operatorname{tr} A)f(t)$ が成り立つことを示せ．

定義.

$$K_n[\,t\,] = \{t \text{ に関する高々 } n \text{ 次の，} K \text{ の元を係数とする多項式全体}\}$$

とする（あまり一般的な記号ではない）．また，

$$K[\,t\,] = \{t \text{ に関する，} K \text{ の元を係数とする多項式全体}\}$$

とする（こちらは一般的な記号である）．

$K_n[\,t\,] \subset K[\,t\,]$ である．

問 4.7. $K_n[\,t\,]$ は多項式の和，多項式と K の元との積に関して閉じていることを示せ．すなわち，$f, g \in K_n[\,t\,]$ であれば $f+g \in K_n[\,t\,]$ が成り立ち，また，$f \in K_n[\,t\,]$，$\lambda \in K$ であれば $\lambda f \in K_n[\,t\,]$ が成り立つことを示せ．

定義. $f, g \in K_n[\,t\,]$ について，$f+g$（という名前の $K_n[\,t\,]$ の元）を多項式としての和により定め，$f \in K_n[\,t\,]$，$\lambda \in K$ について，λf（という名前の $K_n[\,t\,]$ の元）を多項式と K の元との積として定める．また，$K[\,t\,]$ の元についても同様に多項式としての和，多項式と K の元との積を考える．

このようにすると，$K_n[t]$，$K[t]$ にそれぞれ加法と定数倍（K の元との積）が定まる．$K_n[t]$，$K[t]$ はこれらの演算に関して K-**線型空間**と呼ばれる構造を持つ．また，K^n や $M_{m,n}(K)$ についても，元同士の和や定数倍を考えることができるが，これらの演算に関してそれぞれ K-線型空間である．ここではひとまずこのことを認める．

定義. V, W を K-線型空間とする．写像 $f\colon V \to W$ が K-**線型写像**であるとは

1) $\forall\, v_1, v_2 \in V,\ f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2) $\forall\, v \in V,\ \forall\, \lambda \in K,\ f(\lambda v) = \lambda f(v)$

が成り立つことを言う．

問 4.8. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．$f_A\colon K^n \to K^m$ を $v \in K^n$ について $f_A(v) = Av$ と定めると，f_A は K-線型写像であることを示せ.

問 4.9. f を $K_n[\,t\,]$ の元とすると，

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \quad a_0, \ldots, a_n \in K$$

と唯一通りに表すことができるので，$\varphi(f) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と置く．$\varphi\colon K_n[\,t\,] \to K^{n+1}$ である．

1) φ は K-線型写像であることを示せ.
2) K-線型写像 $\psi\colon K^{n+1} \to K_n[\,t\,]$ であって，$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{K_n[t]}$，$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{K^{n+1}}$ が成り立つものを具体的に構成せよ（必ずしも式で表す必要はないが，紛れがないように定めること）.

問 4.10. $f \in K[\,t\,]$ の時, 多項式 $\varphi(f) \in K[\,t\,]$ を $\varphi(f)(t) = tf(t)$ により定める．$f(t) = 1+t$ であれば $\varphi(f)(t) = t + t^2$ である．また, $f \in K[\,t\,]$ の時, $\psi(f) \in K[\,t\,]$ を $\psi(f)(t) = \dfrac{f(t) - f(0)}{t}$ により定める．$f(t) = 1 + 2t$ であれば $\psi(f)(t) = 2$ である.

1) φ は K-線型写像であることを示せ.
2) ψ は K-線型写像であることを示せ.
3) 任意の $f \in K[\,t\,]$ について $\psi(\varphi(f)) = f$ が成り立つことを示せ.
4) $\varphi(\psi(f)) = f$ は必ずしも成り立たないことを示せ.

問 4.11. $\psi\colon K_n[\,t\,] \to K_n[\,t\,]$ を問 4.10 と同様に定める．$A \in M_{n+1}(K)$ であって，任意の $f \in K_n[\,t\,]$，ただし $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$，について

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

により $b_0, \ldots, b_n$ を定めると，$\psi(f) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ が成り立つようなものを求めよ．また，このような性質を持つ A はただ一つであることを示せ.

問 4.12.

1) $f\colon K^n \to K^m$ を K-線型写像とする．$e_1, \ldots, e_n$ を K^n の基本ベクトルとし，$a_i = f(e_i)$ と定める．$A = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ と置くと，A は $M_{m,n}(K)$ の元であって，

$$\forall\, v \in K^n,\ f(v) = Av$$

が成り立つことを示せ．また，B を A と同様の性質を持つ行列とすると，$B \in M_{m,n}(K)$ であって，$B = A$ であることを示せ．

2) $\varphi\colon K_n[t] \to K_n[t]$ を K-線型写像とする．このとき，$A \in M_{n+1}(K)$ であって，任意の $f \in K_n[t]$，ただし $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$，について

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

により $b_0, \dots, b_n$ を定めると，$\varphi(f) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ が成り立つようなものが唯一つ存在することを示せ．

（以上）