２０１０年度数学 II 演習（理 I 向け）　第２回

'10/4/27（火）４限
'10/4/30（金）４限
'10/5/1 一部訂正

以下では K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．

問 2.1. $a_{ij} \in K$，$c_k \in K$ とする．ただし，$1 \leq i \leq m$，$1 \leq j \leq n$，$1 \leq k \leq m$ とする．K の元 $x_1, \dots, x_n$ に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

を，$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ に関する方程式

$$Av = c,$$

ただし $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$，$c = (c_i) \in K^m$，と同一視し，その解空間を V_c とする（従って $V_c \subset K^n$ である）．$V_c \neq \varnothing$ であるとし，$w \in V_c$ とする．このとき $v \in V_c$ について $f_w(v) = v - w$ と置く，

1) $f_w \colon V_c \to V_0$ であって，f_w は全単射であることを示せ．
2) $w' \in V_c$ とする．$f_w = f_{w'}$ が成り立つことと，$w = w'$ が成り立つことは同値であることを示せ．
3) K^m の部分集合 W を
$$W = \{u \in K^m \mid V_u \neq \varnothing\}$$
により定める．W は K^m の K-部分線型空間であることを示せ．

問 2.2. 連立一次方程式を解く際に，

i) 何番目か（i 番目とする）の式を $\lambda \in K$ 倍する．ただし $\lambda \neq 0$ とする．
ii) i 番目の式に j 番目の式の $\mu \in K$ 倍を加える．ただし $i \neq j$ とする．
iii) i 番目と j 番目の式を入れ替える．ただし $i \neq j$ とする．

という操作をしばしば行う．一方，問 2.1 の冒頭のようにすると，連立一次方程式は K^n の元に関する方程式と読み替えることができる．問 2.1 の記号をそのまま用いることにすれば，$A \in M_{m,n}(K)$，$c \in K^m$ とし，$v \in K^n$ に関する方程式 $Av = c$ を考えることになる．これを踏まえて以下の問いに答えよ．

1) $Av = c$ に対応する連立一次方程式について i) の操作を行い，得られた連立一次方程式を再び行列を用いて $A'v = c'$ と表す．A'，c' は A，c の第 i 行を λ 倍することにより得られることを示せ．
2) ii) に関して，1) と同様に A'，c' を定める．A'，c' は A，c にどのような操作を施して得られるか，1) に倣（なら）って述べよ．

3) iii) に関して，2) と同様のことを述べよ．
4) i)，ii)，iii) のそれぞれについて，逆の操作が何であるか述べ，その操作を i)，ii)，iii) を用いて表せ．
5) i)，ii)，iii) は方程式の解空間を変えない操作であることを示せ．

定義. $A \in M_n(K)$ が**正則**であるとは，ある $B \in M_n(K)$ が存在して

$$AB = BA = E_n$$

が成り立つことを言う．このとき B を A の**逆行列**と呼び A^{-1} で表す．また，

$$\mathrm{GL}_n(K) = \{K \text{ の元を成分とする } n \text{ 次正則行列全体}\}$$

と置く．

注. $A \in M_n(K)$ の逆行列は存在すれば唯一（一意的）である．

問 2.3 (問 2.2 の続き). 問 2.2 の記号をそのまま用いる．

1) 前問 1) に関して，$BA = A'$ が成り立つような $\mathrm{GL}_m(K)$ の元 B を求めよ．また，$B^{-1}A$ と A を比較せよ．
2) 前問 2) に関して，$BA = A'$ が成り立つような $\mathrm{GL}_m(K)$ の元 B を求めよ．また，$B^{-1}A$ と A を比較せよ．
3) 前問 3) に関して，$BA = A'$ が成り立つような $\mathrm{GL}_m(K)$ の元 B を求めよ．また，$B^{-1}A$ と A を比較せよ．

問 2.4. 次の方程式の解空間を，2) 以外については $\{v \in K^n | \exists\lambda_1, \ldots, \lambda_r,\ v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r\}$ の形に，2) については $\{v \in K^n | \exists\lambda_1, \ldots, \lambda_r,\ v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r + v_0\}$ の形に表せ．ただし，n, r や $v_0, v_1, \ldots, v_r$ は問ごとに適宜定めること．また，r はなるべく小さな値となるように定めよ（その値が最小であることは示さなくともよい）．

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

（以上）