２０１０年度数学II演習（理I向け）　第１回

'10/4/13（火）４限
'10/4/19（月）４限
'10/4/16 一部訂正
'10/4/26 再修正

以下では K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

定義. K^n の部分集合 V が K^n の K-**部分線型空間**であるとは

i) $V \neq \varnothing$.

ii) $\forall v,\ w \in V,\ v+w \in V$.

iii) $\forall v \in V,\ \forall \lambda \in K,\ \lambda v \in V$.

が成り立つことである（まだ講義していないかもしれないが，すぐに扱う）.

問 1.1. 次に挙げる $\mathbb{R}^n$ の部分集合 V が $\mathbb{R}^n$ の $\mathbb{R}$-部分線型空間であるかどうか調べよ.

1) $V = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\}$．ただし，$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とする.

2) $V = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = w\}$. ただし，$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$，$w \in \mathbb{R}^m$ とする.

3) $n = 2$ とし，

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ 2x_1 + x_2 = 0 \right\},$$
$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$$

と置く．このとき

i) $V = V_1 \cup V_2$ とするとどうか.

ii) $V = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$ とするとどうか.（これは少し省略した記法である. より正確に表すのであれば $V = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid \exists v_1 \in V_1,\ \exists v_2 \in V_2 \text{ s.t. } w = v_1 + v_2\}$ などとすべきである.）

問 1.2. 次に挙げる集合 V_i（$i = 1, 2, 3$）が，最初の定義と同様の性質

i) $V_i \neq \varnothing$.

ii) $\forall v,\ w \in V_i,\ v+w \in V_i$.

iii) $\forall v \in V_i,\ \forall \lambda \in K,\ \lambda v \in V_i$.

を持つことを示せ.

1) $V_1 = \{K$ の元を係数とする x に関する多項式全体$\}$.
ただし，$f_1,\ f_2 \in V_1$ のとき，$f_1 + f_2$は多項式の和として定め，$f \in V_1$，$\lambda \in K$ のとき，λf は多項式の定数倍として定める.
※ 考えにくければ最初は $K = \mathbb{R}$ としても良い.

2) $K = \mathbb{R}$ とし，$V_2 = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ は連続$\}$ と置く.
ただし，$f, g \in V_2$ のとき $f + g$（という名前の函数）は

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

により定め，$f \in V_2$，$\lambda \in \mathbb{R}$ のとき λf（という名前の函数）は

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

により定める．なお，連続の定義は高校までの定義でも構わない．

3) $K = \mathbb{R}$ とし，

$$V_3 = \left\{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は連続であり，かつ，充分大きな実数 } M \text{ が存在して，} \\ |x| > M \text{ であれば } f(x) = 0 \text{ が成り立つ} \end{array} \right\}$$

と置き，V_3 の元同士の和，V_3 の元の実数倍は 2) と同様に定める．

※ 一般には f ごとに M は異なることに注意せよ．また，連続の定義は高校までの定義でも構わない．

注 (今は「お話」と思っていればよい).

問 1.2 の記号をそのまま用いる．V_3 は V_2 の部分集合であって，V_2 と V_3 の関係は K^n とその部分線型空間との関係と同様である．実は V_2 は後で扱う「$\mathbb{R}$-線型空間」の例であり，V_3 はその $\mathbb{R}$-部分線型空間である．

問 1.3. $z \in \mathbb{C}$ とする．$f_z \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ と $g_z \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$f_z(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{re} z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \\ \operatorname{im} z(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \end{pmatrix}, \quad g_z(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{re} \bar{z}(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \\ \operatorname{im} \bar{z}(x_1 + \sqrt{-1}x_2) \end{pmatrix}$$

と置くことにより定める．ここで $z(x_1 + \sqrt{-1}x_2), \bar{z}(x_1 + \sqrt{-1}x_2)$ は複素数としての積である．

1) $A_z \in M_2(\mathbb{R})$ であって，任意の $x \in \mathbb{R}^2$ について $f_z(x) = A_z x$ が成り立つようなものがただ一つ存在する．A_z を z を用いて表せ．ここで $M_2(\mathbb{R})$ は実数を成分とする 2 行 2 列の行列全体のなす集合である．
2) $z \neq 0$ であれば 1) で得られる行列 A_z は逆行列を持ち，しかもある $w \in \mathbb{C}$ について $(A_z)^{-1} = A_w$ が成り立つことを示せ．
3) $M_2(\mathbb{R})$ の元であって，1) のようにして得ることができるものを全て挙げよ．
4) f_z を g_z に置き換えて 1) から 3) に答えよ．

問 1.4. 問 1.3 で得られる写像 f_z は

a) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2,\ f_z(x_1 + x_2) = f_z(x_1) + f_z(x_2)$,

b) $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f_z(\lambda x) = \lambda f_z(x)$,

という性質を持つことを示せ．また，g_z についてはどうか調べよ．

問 1.4 の二つの性質を持つ写像を（$\mathbb{R}$-）**線型写像**と呼ぶ．線型写像はこの講義･演習での主題の一つであり，後日扱う．

（以上）