２０１０年度数理科学II（理II・III向け）演習　　　　　'10/6/23（水）２限

問１. x の函数 y に関する次の微分方程式を解け.
ヒント：解のあたりをつける際には，積分などは思い切っておおらかに計算してしまうのがよい.

1) $y' = y^2$　　2) $xy' = y$　　3) $y' = \dfrac{2y+x}{x}$

4) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$　　5) $y' + 2xy = x$　　6) $y' + \dfrac{y}{x} = x$

7) $(5x+4y+1)dx + (4x+2y+3)dy = 0$

8) $\sin y\, dx + (1 + x\cos y)dy = 0$

9) $y = xy' + {y'}^2$　　10) $y = xy' - e^{y'}$

問２. 行列 X が以下に等しい場合に，指数行列 $\exp X$ と $\exp(tX)$ をそれぞれ求めよ[1].
指数函数や三角函数がテーラー展開可能であること，またその展開は既知としてよい.
ヒント：Jordan 標準形に持ち込むのは常に得策というわけではない.

1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　3) $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，但し s は実定数とする.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$　　5) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問３. 以下の常微分方程式を解け.

1) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 - 2y_3 \\ y_2' = -3y_1 + 13y_2 - 7y_3 \\ y_3' = -5y_1 + 19y_2 - 10y_3 \end{cases}$　　2) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

問４. f を $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}$ 値函数とする．このとき微分方程式

$$\frac{df}{dx}(x) = 3f(x) + xe^{3x}, \quad f(0) = 0$$

を以下の手順に従って解け.

1) まず $\dfrac{df}{dx}(x) = 3f(x)$ を解く.（解は $f(x) = Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$）

2) f が $\dfrac{df}{dx}(x) = 3f(x) + xe^{3x}$ の解であったとして，$g(x) = f(x)e^{-3x}$ とおき，g のみたすべき微分方程式を求める.

3) 上で求めた微分方程式を解き，初期条件 $(f(0) = 0)$ を充たす解を選ぶ.

[1] 4), 5), 6) は線型代数演習 齋藤正彦著 東京大学出版会より改題

問 5．1) 微分方程式

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

の $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をみたす解をそれぞれ求めよ.

ヒント：まず y_2 について微分方程式を解いてみよ.

2) 1) で得た解をそれぞれ $Y_1,\ Y_2$ として，行列値函数 Λ を $\Lambda(x) = (Y_1(x)\ Y_2(x))$ により定める（Λ は定義により基本解行列である）．$\Lambda(x)$ は任意の x について正則であることを確かめよ.

3) 2) で作った基本解行列 Λ を用いて微分方程式

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xe^{\frac{1}{2}x^2} \\ e^{\frac{1}{2}x^2} \end{pmatrix}$$

の一般解を求めよ.

問 6．以下の $y = y(x)$ に関する高階常微分方程式の一般解を求めよ.

1) $y'' + 3y' + 2y = 0$
2) $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0$
3) $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = 0$
4) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

問 7．x の函数 y に関する常微分方程式 $y'' + Py' + Qy = 0$, P, Q は x の連続函数, を考える．便宜上この方程式を $(*)$ と呼ぶ．以下では（連続な係数を持つ）線型常微分方程式に関する解の存在と一意性を用いてよい.

1) $(*)$ の解 y が $y(0) = y'(0) = 0$ を充たすならば y は恒等的に 0 であることを示せ.

2) y を $(*)$ の解であって，恒等的には 0 ではないものとする．また，$x_0 \in \mathbb{R}$ について $y(x_0) = 0$ であるとする（x_0 は y の零点であるなどという）．このとき，ある $\epsilon > 0$ が存在し，$(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ における y の零点は x_0 のみであることを示せ．すなわち，$x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, $x \neq x_0$ であれば $y(x) \neq 0$ であるような $\epsilon > 0$ が存在することを示せ.

3) $(*)$ の一組の基本解を y_1, y_2 とする．a, b を y_1 の零点であって, 開区間 (a, b) には y_1 は零点を持たないとする．このとき，y_2 は (a, b) に零点を唯一つ持つことを示せ.

4) y を $(*)$ の恒等的には 0 ではない解とし，$J = [a, b]$ を（有限な）閉区間とすると，y の J における零点は有限個であることを示せ.
ヒント：任意の $x \in J$ について x を含む開区間であって，そこにおける y の零点は高々1 個であるようなものがとれることが示せたとする．J はコンパクトなのでハイネ・ボレルの定理（任意の開被覆が有限部分被覆を持つ）を利用できる.

問 8．微分方程式 $y' = -2xy^2$, $y(0) = 1$ の解を g とし，これを逐次近似法で求めてみる[2].

1) $f(x, y) = -2xy^2$ として，$y_0(x) = 1$, $y_n(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt$ とするとき，$y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ を具体的に求めよ．

2) 解 g を求めよ.

3) y_n は任意の閉区間 $[0, c]$ 上で g に一様収束することを示せ.

4) $x > 0$ とする．$g(x)$ を

$$g(x) = g(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{g^{(n)}(\xi_n)}{n!} x^n$$

と表すことができるが（ただし，ξ_n は $0 < \xi_n < x$ をみたす実数である．ξ_n を具体的に求める必要はない），上の式（の各項）を具体的に計算せよ．

5) 4) において $R_n = \frac{g^{(n)}(\xi_n)}{n!} x^n$ と置く．$x > 1$ であると R_n は 0 に収束しないことを示せ．また，g の 0 におけるテーラー級数の収束半径を求めよ．

※ 本当は2) と3) は逆で，y_n がどんな函数に収束するか考察して（当たりをつけて）それに本当に収束していることを示すのが本筋である．

問 9．x の函数 y に関する微分方程式 $y' = -2xy$, $y(0) = 1$ の解を g とする.

1) 解 g を求めよ.

2) $f(x, y) = -2xy$ として，$y_0(x) = 1$, $y_n(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt$ と定めるとき，$y_n(x)$, $n = 1, 2, \cdots$, を具体的に求めよ.

3) 函数 y_n は任意の閉区間 $[0, c]$ 上で函数 g に一様収束することを示せ.
ただし，必要であればテーラーの定理（の特別な場合）

> g を $\mathbb{R}$ 上定義された C^∞ 級の函数とするとき，函数 R_n を
> $$R_n(x) = g(x) - \left(g(0) + g'(0)x + \frac{g^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} \right),$$
> ただし，$g' = \frac{dg}{dx}$, $g^{(k)} = \frac{d^k g}{dx^k}$, で定めると，ある $a \in (0, x)$ に対して
> $$R_n(x) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} x^n$$
> が成り立つ.

を用いてよい.

[2]解の存在を示したときの方法を実際に適用してみる.

問１０. 以下のベクトル場 X の積分曲線であって，$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を通るものを求めよ．

1) $X(x,y) = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$.
2) $X(x,y) = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$.
3) $X(x,y) = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$.

問１１. ２つの C^∞ 級の曲線 $\varphi(t), \psi(t)$ が $t = t_0$ で交わるとする．つまり $\varphi(t_0) = \psi(t_0) \in \mathbb{R}^2$ が成り立つとする．この交点を p とし，φ, ψ が p でなす角を, p における φ, ψ の接線のなす角と定める．

1) $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}$, $\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$ と座標を用いて表す．$\varphi(t)$, $\psi(t)$ が $t = t_0$ で直交するための条件を式で表せ．
2) ２つのベクトル場 $X(x,y) = a_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + a_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$, $Y(x,y) = b_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + b_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ が条件 $a_1(x,y)b_1(x,y) + a_2(x,y)b_2(x,y) = 0$ をみたすとする．このとき, X, Y の積分曲線は交わるのであれば直交することを示せ．ただし, X, Y はいずれも零ベクトル $\left(= 0\dfrac{\partial}{\partial x} + 0\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ にはならないとする．

問１２. 1) $a = a(x)$ を $x \in \mathbb{R}$ の連続函数とし, y に関する微分方程式 $y' = ay$ を考える．f を一つの解とする．ある $T > 0$ が存在して a が $a(x+T) = a(x)$ を充たすならば, $g(x) = f(x+T)$ で定まる函数 g も解であることを示せ．

2) 解の一意性を用いて $g(x) = cf(x)$ を充たす実数 c が唯一つ存在することを示せ．
3) $c < 0$ $(c > 0)$ であれば $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ $(\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty)$ が成り立つことを示せ．
4) $c = 1$ であれば $|f(x)|$ は $x \to +\infty$ の時有界であることを示せ．すなわち, ある実数 M, x_0 が存在し, $x > x_0$ のとき $|f(x)| \leq M$ であることを示せ．また, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在しないような例を挙げよ．

問１３. Ψ を条件

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M > 0,\ x > M \Rightarrow |\Psi(x,y)| < \epsilon$$

をみたす $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ の C^1-級の函数とする．x の函数 y についての常微分方程式 $y' = \Psi(x,y)$ の解 f であって，$(0,\infty)$ 上で定義され，かつ $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ なるものが存在するような Ψ の例を挙げよ．

問１４. x の函数 y_n, $n = 1, 2, \cdots$, を条件

$$\frac{dy_1}{dx}(x) = xy_1(x),\ y_1(0) = 1,$$
$$\frac{dy_n}{dx}(x) = xy_n(x) + y_{n-1}(x),\ y_n(0) = 1$$

により定める．このとき, y_n, $n = 1, 2, \cdots$, を具体的に求めよ．

問１５．$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\}$ と定める．X を U 上の C^∞ 級のベクトル場であって，任意の $p \in U$ について $X(p) \neq 0$（零ベクトル）であるとする．

1) φ を X の積分曲線であって，$\mathbb{R}$ 上定義されているものとすると次の (a) あるいは (b) が成り立つことを示せ：
   (a) φ のグラフは自分自身とは交わらない，つまり，$\varphi(t) = \varphi(s)$ であれば $t = s$ が成り立つ．
   (b) ある $T > 0$ が存在して $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ が任意の実数 t について成り立つ．

2) 最初の仮定をみたすベクトル場であって，性質 (a) を持つ積分曲線が存在するもの，性質 (b) を持つ積分曲線が存在するものをそれぞれ一つずつ挙げよ（同じベクトル場でも，別々のベクトル場でも構わない）．

問１６．全微分方程式 $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$ について考える．この問では，函数や変数による割り算などはおおらかに考えてよいことにする．

1) f が x と y の C^∞ 級函数であるとき，$df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ と定める．右辺は係数に表れる函数が0なら0とみなす．つまり，$0dx+0dy$ を 0 と表す．さて，x の函数 h が $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ の解であったとする．また，$\varphi = \varphi(x,y)$ が $d\varphi = fdx + gdy$ をみたすとする．このとき，$\psi(x) = \varphi(x, h(x))$ と定めると $\dfrac{d\psi}{dx} = 0$ が成り立つことを示せ．
   ※ 逆に，次のように考えることができる．方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f}{g}$ を解くのに，全微分方程式 $fdx + gdy = 0$ を考える．もし $d\varphi = fdx + gdy$ をみたすような $\varphi(x,y)$ を見つけることができたとすると，$\varphi(x,y) = c$（定数）を y について解けば元の方程式の解が得られたことになる．一方 $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$ という方程式の解は $(f(x,y)dx + g(x,y)dy)(X) = 0$ をみたすベクトル X と考えるのが良く，そして，元の方程式の解のグラフは X の積分曲線と考えることができるのであった．
2) $d\varphi = fdx + gdy$ なる φ が存在したとすると，$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ が成り立つことを示せ．
   適切に定義をすると，この事実は $d(fdx + gdy) = 0$ と表すことができる．

（以上）

（かなり）略解

以下の略解はかなり端折ってあるので，各自細部を補うこと．

1) 変数分離型の方程式．$y(x)$ が 0 をとらないとすると，

$$\begin{aligned}&y' = y^2\\&\Rightarrow\ \frac{1}{y^2}y' = 1\\&\Rightarrow\ \int \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}dx = \int dx\\&\Rightarrow\ \int \frac{1}{y^2}dy = \int dx\\&\Rightarrow\ -\frac{1}{y} = x + C \quad (C\text{ は任意定数})\\&\Rightarrow\ y = -\frac{1}{x+C}\end{aligned}$$

また，$y(x) \equiv 0$ も解である．よって[3]解は $y = -\dfrac{1}{x+C}$ または $y \equiv 0$（恒等的に 0）．

2) 変数分離型の方程式．$y(x)$ が 0 をとらないとする．

$$\begin{aligned}&xy' = y\\&\Rightarrow\ \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\\&\Rightarrow\ \int^x \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \frac{1}{x}dx\\&\Rightarrow\ \log|y| = \log|x| + C_1 \quad (C_1\text{ は任意定数})\\&\Rightarrow\ y = \pm e^{C_1}x\end{aligned}$$

ここで $\pm e^{C_1}$ の部分は 0 でない定数 C_2 に置き換えることができる．また，$y \equiv 0$ も解なので，解は $y(x) = Cx$ $(C \in \mathbb{R})$.

3)

$$\begin{aligned}&y' = \frac{2y+x}{x}\\&\Rightarrow\ y' = 2\frac{y}{x} + 1\end{aligned}$$

より，同次型の方程式である．$u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ とおくと，$y(x) = xu(x)$ より $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ が従う．よって

$$\begin{aligned}&u + xu' = 2u + 1\ \Rightarrow\ \frac{1}{u+1}u' = \frac{1}{x}\ \Rightarrow\ \int^u \frac{1}{u+1}du = \int^x \frac{1}{x}dx\\&\Rightarrow\ \log|u+1| = \log|x| + C_1 \quad (C_1\text{ は任意定数})\\&\Rightarrow\ u = -1 \pm e^{C_1}x\end{aligned}$$

---

[3]たとえばここはなぜ「よって」なのか考える必要がある．以下では注意しない．

このことから $u = Cx - 1$ $(C \in \mathbb{R})$ と書けることがわかる．$u = \dfrac{y}{x}$ であったので $y(x) = Cx^2 - x$ が解となる．

4) 一階線型微分方程式である．式の両辺に $e^{\sin x}$ を掛けると

$$y'e^{\sin x} + ye^{\sin x}\cos x = e^{\sin x}\sin x\cos x \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}(ye^{\sin x}) = e^{\sin x}\sin x\cos x$$
$$\Rightarrow\; ye^{\sin x} = \int^x e^{\sin x}\sin x\cos x dx$$

さて，この右辺の積分は $t = \sin x$ と変数変換すると

$$\int^x e^{\sin x}\sin x\cos x dx = \int^t e^t t\cos x\frac{1}{\cos x}dt = \int^t te^t dt = te^t - e^t + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

と計算できる．変数を t から x に戻して

$$ye^{\sin x} = e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C \;\Rightarrow\; y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$$

よって解は $y(x) = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$.

5) 一階線型微分方程式である．式の両辺に e^{x^2} を掛けると

$$y'e^{x^2} + 2xe^{x^2}y = xe^{x^2} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}(ye^{x^2}) = xe^{x^2} \;\Rightarrow\; ye^{x^2} = \int^x e^{x^2}dx$$
$$\Rightarrow\; ye^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \; (C \text{ は任意定数})$$

よって解は $y(x) = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$.

6) 一階線型微分方程式．式の両辺に x を掛けると

$$xy' + y = x^2 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}(xy) = x^2 \;\Rightarrow\; xy = \frac{1}{3}x^3 + C \; (C \text{ は任意定数})$$

よって解は $y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x}$ となる．

7) 全微分方程式である．これが完全微分型であることが、

$$\frac{\partial}{\partial y}(5x + 4y + 1) = 4 = \frac{\partial}{\partial x}(4x + 2y + 3)$$

であることからわかる。そこで $\phi(x, y)$ を

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 5x + 4y + 1, \; \frac{\partial\phi}{\partial y} = 4x + 2y + 3$$

が成り立つように定めたい．第１式を x について積分して

$$\phi(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy + x + f(y) \; (f(y) \text{ は } y \text{ のみによる関数})$$

が得られる．これを第２式に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{5}{2}x^2 + 4xy + x + f(y)\right) = 4x + 2y + 3$$
$$\Rightarrow\; 4x + f'(y) = 4x + 2y + 3$$

これより $f'(y) = 2y + 3$．よって $f(y) = y^2 + 3y + C$ (C は任意定数) となる．よって $\phi(x, y) = \frac{5}{2}x^2 + 4xy + x + y^2 + 3y + C$ と置け，求める解は

$$\frac{5}{2}x^2 + 4xy + y^2 + x + 3y = C_1 \ (C_1 \text{ は任意定数})$$

となる．

8) 全微分方程式．これが完全微分型であることが

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin y) = \cos y = \frac{\partial}{\partial x}(1 + x\cos y)$$

であることからわかる．そこで $\phi(x, y)$ を

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sin y, \ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 1 + x\cos y$$

が成り立つように定めたい．第１式を x について積分して

$$\phi(x, y) = x\sin y + g(y) \ (g(y) \text{ は } y \text{ のみによる関数})$$

が得られる．これを第２式に代入すると

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}\left(x\sin y + g(y)\right) = 1 + x\cos y \\ &\Rightarrow \ x\cos y + g'(y) = 1 + x\cos y \end{aligned}$$

が得られる．これより $g'(y) = 1$ が従い，$g(y) = y + C$ (C は任意定数) がわかる．よって $\phi(x, y) = x\sin y + y + C$ とおけて，求める解は

$$x\sin y + y = C_1 \ (C_1 \text{ は任意定数})$$

となる．

9) クレーロー型の方程式．この式の両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} &y' = y' + xy'' + 2y'y'' \\ &\Rightarrow \ (x + 2y')y'' = 0 \end{aligned}$$

が得られる．このことから

$$x + 2y' = 0 \text{ または } y'' = 0$$

が従う．第２式からは $y(x) = c_1x + c_2$ (c_1, c_2 は任意定数) とおけることがわかる．この式をもとの式 $y = xy' + y'^2$ に代入すると

$$c_1x + c_2 = xc_1 + c_1^2 \ \Rightarrow \ c_2 = c_1^2$$

が得られ、結局第２式から微分方程式の解 $y(x) = Cx + C^2$ (C は任意定数) を得る．また第１式 $x + 2y' = 0$ について，これを y' について解いた $y' = -\frac{1}{2}x$ を問題の式 $y = xy' + y'^2$ に代入して

$$y = x\left(-\frac{1}{2}x\right) + \left(-\frac{1}{2}x\right)^2 \ \Rightarrow \ y = -\frac{1}{4}x^2$$

を得る．こうして得られた $y(x) = -\frac{1}{4}x^2$ も解である．

よって解は $y(x)=Cx+C^2,\ y(x)=-\frac{1}{4}x^2$ である．
10) クレーロー型の方程式．この式の両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} &y' = y' + xy'' - y''e^{y'} \\ &\Rightarrow (x-e^{y'})y'' = 0 \end{aligned}$$

が得られる．よって

$$x - e^{y'} = 0 \text{ または } y'' = 0$$

が従う．第 2 式から $y(x) = c_1x + c_2$ (c_1, c_2 は任意定数) とおけることがわかる．この式を問題の式に代入すると

$$c_1x + c_2 = xc_1 - e^{c_1} \ \Rightarrow \ c_2 = -e^{c_1}$$

が得られ，結局第 2 式から微分方程式の解 $y(x) = Cx - e^C$ (C は任意定数) を得る．
また第 1 式 $x - e^{y'} = 0$ について、これを y' について解いた $y' = \log x$ を問題の式 $y = xy' - e^{y'}$ に代入して

$$y = x\log x - x$$

が得られる．こうして得られた $y(x) = x\log x - x$ も解である．
よって解は $y(x) = Cx - e^C,\ y(x) = x\log x - x$ である．