２００９年度数学II資料 (理I向け)　　'10/1/7（木）３限
'10/1/12（火）３限

以下では特に断らなければ $K$ で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

**定義 1.** 直和分解 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ が直交直和分解であるとは，この直和が直交直和であることを言う.

**問 2.** 1) $A \in \mathrm{O}_n$ とすると $\det A = \pm 1$ が成り立つことを示せ.

2) $A \in \mathrm{O}_2$ とする.

(a) $\mathbb{R}^2$ のある 1 次元部分線型空間 $V$ であって，$A$-不変なものが存在したとする. すると $\det A = -1$ であるか，あるいは $A = \pm E_2$ であることを示せ．また，この逆も正しいことを示せ.

(b) $\det A = -1$ であれば 直交直和分解 $\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_2$（直交直和）であって，$V_1, V_2$ は共に $A$-不変であり，かつ $\dim V_1 = \dim V_2 = 1$ であるようなものが存在することを示せ．また，$A$ から自然に定まる $\mathbb{R}^2$ の線型変換（一次変換）を簡潔に図示せよ．その際，線型変換と $V_1, V_2$ との関係がわかるようにすること.

3) $A \in \mathrm{O}_3$ とする.

(a) 直交直和分解 $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ （直交直和）であって，$V_1, V_2$ は共に $A$-不変であり，かつ $\dim V_1 = 1$ であるようなものが存在することを示せ.

(b) $\det A = 1$ であれば $\forall v \in V_1,\ f(v) = v$ が成り立つように $V_1$ を取れることを示せ．また，$\det A = -1$ であれば $\forall v \in V_1,\ f(v) = -v$ が成り立つように $V_1$ を取れることを示せ.

(c) $V_1$ を (b) のように取る．このとき $v \in V_2$ について $g(v) = f(v)$ と置けば $g$ は計量を保つ $V_2$ の線型変換であることを示せ．さらに，$V_2$ の任意の正規直交基底に関する $g$ の表現行列を $B$ とすれば $B \in \mathrm{O}_2$ かつ $\det B = 1$ が成り立つことを示せ.

(d) $A$ から自然に定まる $\mathbb{R}^3$ の線型変換を，$V_1, V_2$ との関係がわかるように簡潔に図示せよ.

**定義 3.** $X \in M_n(K)$ について

$$\exp X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} X^m$$
$$= E_n + X + \frac{1}{2}X^2 + \cdots + \frac{1}{m!}X^m + \cdots$$

と置いて exp を（行列の）指数函数と呼ぶ．なお，ここでは $X^0 = E_n$ と考える．

**注.** 1) 本来は上の定義にある級数の収束は大切な問題であるのでなるべく調べてみること．必要であれば教科書などを参照せよ．

2) $\exp X$ には日本語の定まった呼称は無いように思う．

**問 4** (収束については気にせず,「項が無限にある多項式」と考えて計算すればよい).

1) $X \in M_n(K)$, $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ とすると，$\exp(P^{-1}XP) = P^{-1}(\exp X)P$ が成り立つことを示せ．

2) $X \in M_n(K)$ とすると，${}^t\exp X = \exp {}^tX$，$(\exp X)^* = \exp X^*$ がそれぞれ成り立つことを示せ．

3) $X, Y \in M_n(K)$ が $XY = YX$ を充たせば

$$\exp(X+Y) = (\exp X)(\exp Y) = (\exp Y)(\exp X)$$

が成り立つことを示せ．$XY = YX$ が成り立たない場合には $\exp(X+Y)$, $(\exp X)(\exp Y)$, $(\exp Y)(\exp X)$ のどの二つも一致しないことがある．このような例を挙げよ．

4) $X \in M_n(K)$ であれば $\exp X \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことを示せ．また，$(\exp X)^{-1}$ を求めよ．

5) $X \in \mathfrak{o}_n = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X + {}^tX = O_n\}$ ならば $\exp X \in \mathrm{O}_n$ が成り立つことを示せ．また，$X \in \mathfrak{u}_n = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid X + X^* = O_n\}$ ならば $\exp X \in \mathrm{U}_n$ が成り立つことを示せ．

**問 5.** $X \in M_n(K)$ とする．$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ を $X$ の相異なる固有値全体とし，$\alpha_i$ の重複度を $p_i$ とする．

1) $\exp X$ の相異なる固有値全体は $\{e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_r}\}$ であって，$e^{\alpha_i}$ の重複度は $p_i$ であることを示せ．
ヒント：$X$ を三角化してみよ．

2) $\det \exp X = e^{\operatorname{tr} X}$ が成り立つことを示せ．

**問 6** ($K = \mathbb{R}$ として考えてもよい). 1) $X \in M_n(K)$ とする．$\mathrm{GL}_n(K)$ に値をとる函数 $F\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(K)$ を

$$F(t) = \exp(tX),\ t \in \mathbb{R}$$

により定める．このとき $\dfrac{dF}{dt}(t) = X\exp(tX) = (\exp(tX))X$ が成り立つことを示せ．ここで，行列に値をとる函数の微分は行列の各成分を函数とみて微分することにより定める．

2) $Y$ を $M_n(K)$ に値をとる，実数 $t$ に関する函数とする．ここで

$$Z(t) = \exp Y(t)$$

と置く．

(a) $n = 1$ とすると

$$\frac{dZ}{dt}(t) = \frac{dY}{dt}(t)Z(t) = Z(t)\frac{dY}{dt}(t)$$

が成り立つことを示せ．

(b) $X \in M_n(K)$ として，$Y(t) = Xt$ と置くと，1) の場合であることを確かめよ．従ってこのときも

$$\frac{dZ}{dt}(t) = \frac{dY}{dt}(t)Z(t) = Z(t)\frac{dY}{dt}(t)$$

が成り立つ．

(c) $m \geq 2$ とすると $\dfrac{dZ}{dt}(t)$, $\dfrac{dY}{dt}(t)Z(t)$, $Z(t)\dfrac{dY}{dt}(t)$ のうちどの二つも一致しないことがあることを例を挙げて示せ．

（以上）