２００９年度数学II資料 (理I向け) '09/12/14（月）３限
'09/12/15（火）３限

以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 1. $\mathbb{R}_3[x]$ を x に関する高々 3 次の実係数多項式全体のなす線型空間とし,

$$V = \{f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(1) = 0\},\ W = \{f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(2) = 0\}$$

と置く.

1) $V \cap W$ の基底を一組求めよ．これを $\mathscr{U}$ とする．V, W の基底 $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ であって, $\mathscr{U}$ の拡大（延長）となっているものを一組ずつ求めよ.
2) $f \in V$ の時, x に関する多項式 $\varphi(f)$ を $\varphi(f)(x) = f(x-1)$ により定める．$\varphi(f) \in W$ であることと, $\varphi\colon V \to W$ は線型同型写像であることを示せ.
3) 1) で求めた V の基底 $\mathscr{V}$ と W の基底 $\mathscr{W}$ に関する φ の表現行列を求めよ.

問 2. $\mathbb{R}^n$ と標準計量を考える．また，標準的なノルムを $\|\cdot\|$ で表す.

1) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が計量を保つ線型写像であれば f は線型同型写像であることを示せ.

※ 以下では $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は計量を保つ線型写像であるとする.

2) $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \|f(v)\| = \|v\|$ が成り立つことを示せ.
3) $v, w \in \mathbb{R}^n$ とする．v と w のなす角と $f(v)$ と $f(w)$ のなす角は常に等しいことを示せ.
   ※ 証明の書き方に困難を感じる場合には v と w のなす角は 0 以上 π 未満と仮定してもよい.
4) （追加）線型とは限らない写像 $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が条件

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \|g(v)\| = \|v\|$$

   を充たすとする．このとき g は線型同型写像であることを示せ.
   ヒント：まず g が計量を保つことを示し，次に $\|g(v+w) - g(v) - g(w)\|^2$ を計算してみよ.

問 3. $M_n(K)$ を行列の加法と定数倍により K-線型空間とみなす．$A, B \in M_n(K)$ について $\langle A|B\rangle = \operatorname{tr} A^*B$ と置く．また，e_{ij} を (i,j)-成分が 1 で，ほかの成分は全て 0 であるような $M_n(K)$ の元とする．

1) $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ は $M_n(K)$ の計量であることを示せ．以下では常にこの計量を考える．
2) $\{e_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ は $M_n(K)$ の正規直交基底であることを示せ．
3) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とし，$f_A\colon M_n(K) \to M_n(K)$ を $f_A(X) = AX$ により定める．f_A は線型同型写像であることを示せ．
   ヒント：f_A の表現行列を用いるのはあまり得策ではない．
4) ${f_A}^*$（f_A の随伴写像）について，${f_A}^*(X)$ を A と X を用いて簡潔に表せ．
   ヒント：f_A や ${f_A}^*$ の表現行列を考えるのは得策ではない．
5) f_A が対称変換（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいはエルミート変換（$K = \mathbb{C}$ の場合）になるための A に関する条件を求めよ．
6) f_A が等長写像になるための A に関する条件を求めよ．

（以上）