

以下では特に断らなければ  $K$  で  $\mathbb{R}$  あるいは  $\mathbb{C}$  を表す.

問 7.1.  $t_1, t_2, t_3, t_4 \in K$  とし,  $K^4$  の元  $a_1, a_2, a_3$  を

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix}$$

により定める. また,  $A = (a_1 \ a_2 \ a_3)$  と置く.

- 1)  $V = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$  と置くと,  $V = \{w \in K^4 \mid \exists v \in K^3, w = Av\}$  が成り立つことを示せ.
- 2)  $A'$  を  $A$  を右基本変形して得られる行列とすると,  $V = \{w \in K^4 \mid \exists v \in K^3, w = A'v\}$  が成り立つことを示せ.
- 3)  $\dim V = \text{rank}(a_1 \ a_2 \ a_3)$  が成り立つことを示せ. また, この等しい値を求めよ.
- 4)  $V$  を簡潔に表せ.

問 7.2.  $K[x]$  を  $x$  に関する  $K$ -係数の多項式全体のなす  $K$ -線型空間とする. 即ち,

$$K[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_0, \dots, a_n \in K\}$$

と置く.  $f, g \in K[x]$  の時,  $f+g$  は  $f$  と  $g$  の, 次数が等しい項の係数同士を加えて得られ, また,  $f \in K[x], \lambda \in K$  の時,  $\lambda f$  は  $f$  の各項を一斉に  $\lambda$  倍して得られるのであった. ここで  $f, g \in K[x]$  の時,  $f+g$  を函数としての  $f$  と  $g$  の和として定める. 即ち,  $f+g$  を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

であるような函数として定める. このとき,  $f+g = f+g$  が成り立つことを示せ. また, 同様に  $f \in K[x], \lambda \in K$  の時  $\lambda \times' f$  を函数としての  $f$  と  $\lambda$  の積として定める. 即ち,  $\lambda \times' f$  を

$$(\lambda \times' f)(x) = \lambda f(x)$$

であるような函数として定める. すると  $\lambda \times' f = \lambda f$  が成り立つことを示せ.

注:  $+$  や  $\times'$  という記号は勿論ここだけの記号であって, 通常は用いない.

問 7.3. 1)  $f: K^{n+1} \rightarrow K_n[x]$  を

$$f \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

により定めると  $f$  は  $K$ -線型同型写像であることを示せ. また,  $f$  の逆写像を求めよ.

2)  $g: K^{n+1} \rightarrow K_n[x]$  を

$$g \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots + (a_0 + \cdots + a_n)x^n$$

により定めると  $g$  は  $K$ -線型同型写像であることを示せ. また,  $g$  の逆写像を求めよ.

問 7.4. 線型写像  $\varphi: K^2 \rightarrow K^3$ ,  $\psi: K^3 \rightarrow K^3$  をそれぞれ

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ -x + y \\ y \end{pmatrix}, \quad \psi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ 2x + y - 3z \\ x - y \end{pmatrix}$$

により定める.

1)  $\psi \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を具体的に計算し, 表現行列を求めよ.

2)  $\psi \circ \varphi$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  の表現行列をそれぞれ  $A, B, C$  とする.  $A, B, C$  を求め,  $A = CB$  が成り立つことを確かめよ.

問 7.5.  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  のとき  $f(v) = \begin{pmatrix} x^n + y + z \\ x + y \end{pmatrix}$  として定める.

ただし  $n$  は正の整数であるとする.  $f$  が線型写像であることと  $n = 1$  であることは同値であることを示せ.

問 7.6. 1) 線型写像  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  は線型同型写像になりえないことを示せ.

注: 次元の話に持ち込んでしまえばすぐに示せるが, 上の主張を示すだけであれば実は次元に関する知識は必ずしも必要ない. 例えば一次方程式の話に持ち込むこともできるし, あるいは次のように考えることもできる.  $\varphi$  が線型同型写像であると仮定し,  $t = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

$s = \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  とおく.  $t$  や  $s$  が実数であることに注意すると,  $\varphi^{-1}(t)$  と  $\varphi^{-1}(s)$  は本来持つはずのない性質を持ってしまふことがわかる (議論の仕方によっては一次方程式の話に持ち込むのとはほぼ同じことになる).

2)  $n > m$  とすると, 任意の線型写像  $f: K^n \rightarrow K^m$  について  $f$  は単射でないことを示せ.

3)  $n < m$  とすると, 任意の線型写像  $f: K^n \rightarrow K^m$  について  $f$  は全射でないことを示せ.

問 7.7.  $\mathbb{R}^3$  の元  $v_1, v_2, v_3$  について, 条件

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を充たす  $\mathbb{R}^3$  から  $\mathbb{R}^3$  への線型写像について考える.

- 1) 以下のように  $v_1, v_2, v_3$  を定める時, 上の条件を充たす  $f$  が存在するならばそれを求め, 存在しないのであればそのことを示せ.

$$(a) v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$(b) v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- 2)  $A = (v_1 \ v_2 \ v_3)$  とする. 上の条件を充たす  $f$  が存在することと,  $A$  が正則であることは同値であることを示せ. また,  $A$  が正則な時に上の条件を充たす  $f$  の表現行列を  $A$  を用いて表せ.

問 7.8.  $f \in \mathbb{R}_n[x]$  に対して  $\varphi(f) \in \mathbb{R}_{2n}[x]$  を条件

$$\varphi(f)(x) = f(x^2)$$

により定める.

- 1)  $\varphi$  を  $\mathbb{R}_n[x]$  から  $\mathbb{R}_{2n}[x]$  への写像とみなすと  $\varphi$  は線型写像であることを示せ.
- 2)  $\varphi$  は単射であることを示せ.
- 3) 線型写像  $\psi: \mathbb{R}_{2n}[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$  であって  $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{R}_n[x]}$  が成り立つようなものを一つ求めよ. また, そのような  $\psi$  について  $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathbb{R}_{2n}[x]}$  が成り立つかどうか調べよ.

問 7.9. 1)  $f: K^8 \rightarrow K^3$  を

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 \\ x_5 + 2x_6 + x_8 \end{pmatrix}$$

により定め,

$$V = \{v \in K^8 \mid f(v) = 0\},$$

$$W = \{w \in K^3 \mid \exists v \in K^8, w = f(v)\}$$

と置く (後期で定める記号を用いれば,  $V = \text{Ker } f$ ,  $W = \text{Im } f$  である.) このとき,  $V$  と  $W$  を簡潔に表し, それぞれの次元を求めよ.

2)  $g: \mathbb{C}^5 \rightarrow \mathbb{C}^3$  を

$$g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \sqrt{-1}x_3 + x_5 \\ x_2 - 2x_3 \\ x_4 - 3\sqrt{-1}x_5 \end{pmatrix}$$

により定め,  $V, W$  も 1) と同様に定める. このとき,  $V$  と  $W$  を簡潔に表し, それぞれの次元を求めよ.

問 7.10.  $V, W$  を線型空間とし,  $U_1, U_2$  を  $V$  の部分線型空間とする. また,  $f_1: U_1 \rightarrow W$ ,  $f_2: U_2 \rightarrow W$  をそれぞれ線型写像とする.

- 1)  $V = U_1 \oplus U_2$  と直和分解されているとする.  $v \in V$  の時  $v = u_1 + u_2$ , 但し  $u_1 \in U_1$ ,  $u_2 \in U_2$  と表して

$$f(v) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

と置けば  $f$  は  $V$  から  $W$  への写像としてきちんと定まっています (well-defined であるなどという), さらに線型写像であることを示せ.

- 2) 単に  $V = U_1 + U_2$  であるとしても, 必ずしも上の式で  $f$  をきちんと定めることができない. このような例を挙げよ.

問 7.11. 1)  $t_1, t_2, t_3 \in K$  とし,  $K^3$  の部分線型空間  $W_1, W_2$  をそれぞれ

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

により定める.  $W_1 + W_2$  が直和であるための  $t_1, t_2, t_3$  に関する条件を求めよ. また, このとき  $K^3 = W_1 \oplus W_2 (= W_1 + W_2)$  が成り立つことを示せ.

- 2)  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 \in K$  とし,  $K^5$  の部分線型空間  $W_1, W_2, W_3$  をそれぞれ

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

により定める.  $W_1 + W_2 + W_3$  が直和であるための  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5$  に関する条件を求めよ. また, このとき和空間を簡潔に表せ.

定義 7.12.  $f$  を  $\mathbb{R}$  上定義された実数値関数とする.  $f$  が奇関数であるとは任意の  $x \in \mathbb{R}$  について  $f(-x) = -f(x)$  が成り立つことをいい, また,  $f$  が偶関数であるとは任意の  $x \in \mathbb{R}$  について  $f(-x) = f(x)$  が成り立つことをいう.

問 7.13.  $V = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f \text{ は奇関数}\}$ ,  $W = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f \text{ は偶関数}\}$  と置く.

- 1)  $V$  と  $W$  は共に  $\mathbb{R}[x]$  の部分線型空間であることを示せ.
- 2)  $\mathbb{R}[x] = V \oplus W$  が成り立つことを示せ.
- 3)  $\mathbb{R}[x] = V \oplus W$  であるから,  $f \in \mathbb{R}[x]$  の時,  $g \in V$  と  $h \in W$  がそれぞれ唯一つ存在して  $f = g + h$  が成り立つ.  $g$  と  $h$  を  $f$  を用いて簡潔に表せ.  
注: 2) の解き方によってはこちらも同時に解けてしまう.

(以上)