２００９年度数学II演習（理I向け）　第6回　　　　　　　　　　　　　　'09/6/29（月）４限
'09/6/30（火）４限

以下では特に断らなければ K は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

注. V が K-線型空間であるとは，V（や，関連する演算）が K-線型空間の定義を充たすことである．従って，例えば集合 V が与えられたとき，V が K-線型空間であることを示す方法は原理的には V が定義の条件を全て充たすことを全て確認する以外にはない.

問 6.1. 以下の主張を確かめよ.

1) $M_{m,n}(K)$ は行列の和と K の元との積により K-線型空間である.
2) $K[\,t\,]$ で t を変数とする K 係数の多項式全体を表す.

$$K[\,t\,]=\{a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n \mid a_0,\cdots,a_n\in K\}$$

である（n は元ごとに異なる)．また，$K_n[\,t\,]$ で t を変数とする高々 n 次の K 係数の多項式全体を表す.

$$K_n[\,t\,]=\{a_0+a_1t+\cdots+a_mt^m \mid a_0,\cdots,a_m\in K,\ m\le n\}$$

である．$K[\,t\,]$，$K_n[\,t\,]$ は共に多項式の和・実数倍に関して K-線型空間である.
※ $K[\,t\,]$ は一般的な記号であるが，$K_n[\,t\,]$ はそうではないので注意せよ.

3) $V=\{\{a_n\}_{n=1,2,\cdots} \mid a_n\in K,\ a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0\}$ とする.
$a,b\in V$ であるとき，$a=\{a_n\}$, $b=\{b_n\}$ と表しておいて $c_n=a_n+b_n$ と置き，$a{+}b\in V$ を $a{+}b=\{c_n\}$ により定める．また，$a\in V$, $\lambda\in K$ であるとき，$a=\{a_n\}$ と表しておいて $d_n=\lambda a_n$ と置き，$\lambda a\in V$ を $\lambda a=\{d_n\}$ と定める．すると V は K-線型空間である.

問 6.2. V を $\mathbb{C}$-線型空間とする．集合として $W=V$ と置き，$v,v'\in W$ の時，$v{+}v'$ を V の元としての和として定め，$\lambda\in\mathbb{R}$ の時 λv を $\lambda\in\mathbb{C}$ とみなしてから V の元と $\mathbb{C}$ の元との積により定める．このとき，W は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ.
※ $v\in V$ とし，$w=\sqrt{-1}v$ とする．W は集合としては V に等しいので $w\in W$ であるが，W の元としては $\sqrt{-1}v$ は計算できない（定義されていない）ので，$w=\sqrt{-1}v$ という等式は W においては意味を持たない.

定義 6.3. V,W を K-線型空間とする．$f\colon V\to W$ が K-線型写像であるとは，

1) $\forall v_1,v_2\in V,\ f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)$
2) $\forall v\in V,\ \forall\lambda\in K,\ f(\lambda v)=\lambda f(v)$

が共に成り立つことを言う.

上の条件において，左辺の和や定数倍は V の，右辺のそれは W のものであることに注意せよ.

問 6.4. n を固定し,

$$W = \left\{ a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \;\middle|\; a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

と置く．ここで，$w = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$ は，$f \in \mathbb{R}[\,t\,]$ に対して

$$w(f) = a_n \frac{d^n f}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{df}{dt} + a_0 f$$

と置くことで定められた写像である.

1) $w\colon \mathbb{R}[\,t\,] \to \mathbb{R}[\,t\,]$ は $\mathbb{R}$-線型写像であることを示せ.
2) $w = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0$，$w' = b_n \frac{d^n}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} + b_0$ をそれぞれ W の元とする.

$$w + w' = (a_n + b_n)\frac{d^n}{dt^n} + \cdots + (a_1 + b_1)\frac{d}{dt} + (a_0 + b_0)$$

と定め，また，$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lambda w = (\lambda a_n)\frac{d^n}{dt^n} + (\lambda a_{n-1})\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + (\lambda a_1)\frac{d}{dt} + (\lambda a_0)$$

と定めると，$f \in \mathbb{R}[\,t\,]$ について $(w + w')(f) = w(f) + w'(f)$, $(\lambda w)(f) = \lambda w(f)$ がそれぞれ成り立つことを示せ.
3) 上で定めた演算により W は $\mathbb{R}$-線型空間であることを示せ.
ヒント：W の元の「係数」に着目すれば演算は $\mathbb{R}^{n+1}$ のものと同じである.

問 6.5. $V = K^3$ とする．以下に挙げる部分線型空間 W_1, W_2, W_3 の組について，$W_1 + W_2$, $W_1 + W_3$, $W_2 + W_3$, $W_1 + W_2 + W_3$ をそれぞれ求めよ.

1) $V = K^3$，$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
2) $V = K^3$，$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

問 6.6. $V = K[x]$ とする．以下に挙げる部分線型空間 W_1, W_2 の組について，$W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$ をそれぞれ求めよ.

1) $W_1 = \langle x + 1 \rangle$, $W_2 = \langle x - 2 \rangle$.
2) $W_1 = \langle x - 1 \rangle$, $W_2 = \langle x^2 - 3x + 2 \rangle$.
3) $W_1 = \langle x^2 - 3x + 2 \rangle$, $W_2 = \langle x^2 - 4 \rangle$.

問 6.7. 以下に挙げる $\mathbb{R}^2$ の部分集合がそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間であるかどうか理由と共に答えよ.

1) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$　　2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$

3) $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$　　4) $W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} t^3 \\ t^3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$

問 6.8. $\mathbb{R}^2$ の部分線型空間 W を $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$ により定める．$\mathbb{R}^2$ の部分線型空間 U_1, U_2 であって, $\mathbb{R}^2 = W \oplus U_1 = W \oplus U_2$ かつ $U_1 \neq U_2$ であるようなものを一組挙げよ.

問 6.9. V を K-線型空間とし，W_1, W_2, W_3 を V の部分線型空間とする.

1) $(W_1 + W_2) \cap W_3 \supset (W_1 \cap W_3 + W_2 \cap W_3)$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立たない例を挙げよ.
2) $((W_1 \cap W_2) + W_3) \subset (W_1 + W_3) \cap (W_2 + W_3)$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立たない例を挙げよ.

問 6.10. V を K-線型空間とする.

$$V^* = \{ f \colon V \to K,\ K\text{-線型写像} \}$$

と置く.

1) $f, g \in V^*$ とする．$f + g \colon V \to K$ を $v \in V$ に対して
$$(f+g)(v) = f(v) + g(v)$$
により定めると $f + g \in V^*$ であることを示せ.
2) $f \in V^*$，$\lambda \in K$ とする．$\lambda f \colon V \to K$ を $v \in V$ に対して
$$\lambda f(v) = \lambda(f(v))$$
により定めると $\lambda f \in V^*$ であることを示せ.
3) 上の演算に関して V^* は K-線型空間であることを示せ.

V^* を V の双対空間（そうついくうかん）と呼ぶ．$V^\vee$ 等で表すこともある.

問 6.11. V, W を K-線型空間，$f \colon V \to W$ を K-線型写像とする.

1) $g \in W^*$ の時，$f^*(g)$ を
$$f^*(g)(v) = g(f(v)),\ v \in V$$
により定めると，$f^*(g) \in V^*$ であることを示せ．しばしば $f^*(g)$ を単に f^*g で表す.
2) $f^* \colon W^* \to V^*$ は K-線型写像であることを示せ.

（以上）