２００９年度数学 II 演習（理 I 向け）　第５回

'09/6/15（月）４限
'09/6/16（火）４限

以下では特に断らなければ K は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 5.1. 1) 上三角行列（下三角行列）同士の和・積は再び上三角行列（下三角行列）であることを示せ.

2) 正則な上三角行列（下三角行列）の逆行列は上三角行列（下三角行列）であることを示せ.

問 5.2. $A \in M_n(K)$ を $A = \begin{pmatrix} A' & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $A' \in M_{n-1}(K)$ であるように区分けする. $A' \in \mathrm{GL}_{n-1}(K)$ のとき,

$$L = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ c & d' \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} E_{n-1} & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が $A = LU$ を充たすように b', d' を定めよ.

問 5.3. $A \in M_n(K)$ とする. A の第 1 行から第 k 行, 第 1 列から第 k 列までを取り出して得られる行列を $A_k \in M_k(K)$ とする（A_k を第 k 主座小行列（k-th principal minor）と呼ぶ）. もし $A_1, \cdots, A_n (= A)$ が全て正則であるとすると, 対角成分が全て 1 であるような上三角行列 $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ と, 正則な下三角行列 $L \in \mathrm{GL}_n(K)$ がただ一組存在して $A = LU$ が成り立つことを示せ（例えば以下のように示せる）. これを LU 分解と呼ぶ.
存在の証明.

1) $n = 1$ の時は $U = (1)$, $L = A$ とすればよい.
2) 条件を充たすような n 次以下の行列について分解が存在したとし, $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$ であって, A も条件を充たすとする. $A = \begin{pmatrix} A' & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $A' \in M_n(K)$ であるように区分けする. $A' = A_n$ なので, 仮定から A' は正則である. 前問を用いて $A = L_1U_1$ とすると, L_1 の第 n 主座小行列は帰納法の仮定から LU 分解可能である（証明は必要である）. このことを用いてまず L_1 が LU 分解可能であることを示し, それから A 自身が LU 分解可能であることを示す.

一意性の証明. $A = LU = L'U'$ を共に LU 分解とする. このとき, $L'^{-1}L = U'U^{-1}$ が成り立つ. 両辺が共に E_n に等しいことを $L'^{-1}L$, $U'U^{-1}$ の形に着目して示す.

問 5.4. 以下の行列のそれぞれについて, LU 分解を求めよ.

$$1) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \\ -1 & 6 & 11 \end{pmatrix} \qquad 3) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

問 5.5 (ヴァンデルモンド（Vandermonde）の行列式). $n \geq 2$ とする.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

が成り立つことを示せ．ここで，$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ は $1 \leq i < j \leq n$ なる (i, j) の組全てについて $(x_j - x_i)$ を考えてその積を取ることを意味する．この行列式を $x_1, \cdots, x_n$ の差積と呼ぶ.

問 5.6. $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$A = (a_1, \ldots, a_n)$ と K^m の元 $a_1, \ldots, a_n$ を用いて表す. $\operatorname{rank} A = n-1$ かつ $\operatorname{rank}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = n-1$ であるならば，適当な $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in K$ が存在して $a_n = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{n-1} a_{n-1}$ が成り立つことを示せ.

ヒント:例えば次のように考えることが出来る．A の第 1 列から第 $(n-1)$ 列までに着目し $A' = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ と置く．$A = (A' \ a_n)$ であって，$\operatorname{rank} A' = n-1$ である．右基本変形により A の A' の部分を列階段行列に直す．この状態からさらに右基本変形により A 全体を列階段行列に直したときどのような作業で，最終的にどのような形になるか考えてみよ.

問 5.7. $A \in M_{m,n}(K)$ とする．$i_1 < i_2 < \cdots < i_r$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ を正の整数とし，A から第 i_1 行，$\cdots$，第 i_r 行および第 j_1 列，$\cdots$，第 j_r 列を取り出して（取り去るのではない）得られる $M_r(K)$ の元を $A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r}$ で表す（このような行列を r 次小行列などと呼ぶ）．ある $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$，$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ について $\det A_{i_1,\cdots,i_r;j_1,\cdots,j_r} \neq 0$ であることと，$\operatorname{rank} A \geq r$ であることは同値であることを示せ.

ヒント：基本変形により行列のランクは不変なのであった.

問 5.8. $A \in M_n(K)$ とする．A の余因子行列を $\widetilde{A}$ で表す.

1) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であるとき，$\det \widetilde{A}$ を求めよ.
2) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であるとき，$\widetilde{(\widetilde{A})} = (\det A)^{n-2} A$ であることを示せ.
3) $n > 2$ とする．$A \notin \mathrm{GL}_n(K)$ のとき，$\widetilde{(\widetilde{A})} = O_n$ であることを示せ.

ヒント：（少なくとも）二通りの方針があり得る．例えばまず $\operatorname{rank} A$ により場合分けをする．$\operatorname{rank} A < n-1$ の時には問 5.7 を用いれば $\widetilde{A} = O_n$ であることが容易に示せる．$\operatorname{rank} A = n-1$ の時には問 5.6 と，行列式の性質を用いると $\widetilde{A}$ が特別な形をしていることがわかり，$\operatorname{rank} A < n-1$ の場合に帰着できる．あるいは 2) に着目して，まず対応 $A \mapsto \widetilde{(\widetilde{A})}$ が $A \in M_n(K)$ の函数として（つまり n^2 個の変数の函数として）連続であることを示す．一方，任意の $A \in M_n(K)$ についてある正則な行列の列 $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots,}$ であって $\lim_{n \to \infty} A_n = A$ なるものが存在することを示す．これらのことから主張を示すことができる（多変数の函数の連続性について未習であると後者の方針で示すのは難しい）.

（以上）