２００９年度数学II演習 (理I向け)　第3回 '09/5/18（月）４限
'09/5/19（火）４限

以下では特に断らなければ K は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 3.1. 次の方程式を解け. 即ち, 解が存在するかどうか判定し, 存在するなら解を全て求め, 存在しないならばそのことを示せ.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$　　2) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ b \\ 0 \end{pmatrix},$　ただし $a, b \in \mathbb{R}$.

問 3.2. 以下の行列の逆行列が存在するかどうか判定し, 存在するならばそれを求めよ. また, 各々の行列の rank（ランク・階数）を求めよ.

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

問 3.3. $x_1, \ldots, x_n$ に関する実数を係数とする連立一次方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} \qquad (a_{ij}, c_i \in \mathbb{R})$$

が与えられたとし, これを複素数ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に関する方程式とみなす.

1) $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ が方程式 $(*)$ の $\mathbb{C}^n$ における解であったとすると, $\mathrm{re}\, v \in \mathbb{R}^n$ も方程式 $(*)$ の解であり, 一方, $\mathrm{im}\, v \in \mathbb{R}^n$ は連立一次方程式

$$(**) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

の解であることを示せ. なお, 方程式 $(**)$ を方程式 $(*)$ に随伴する斉次方程式と呼ぶ.

2) $(*)$ において $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \neq 0$ であるとする．このとき，$(*)$ が $\mathbb{C}^n$ において解を持つことと，$\mathbb{R}^n$ において解を持つことは同値であることを示せ．

3) $(*)$ において $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = 0$ であるとする（つまり元々斉次方程式であると仮定する）．零ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n (\subset \mathbb{C}^n)$ は明らかに解であるが，これを自明な解と呼ぶ．$(*)$ が $\mathbb{C}^n$ において非自明な解を持つことと，$\mathbb{R}^n$ において非自明な解を持つことは同値であることを示せ．
ヒント：おおよその所は 2) と同様であるが，$\mathbb{C}^n$ における解の成分がすべて純虚数なこともあり得る．

問 3.4. $A \in M_{m,n}(K)$，$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$，$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in K^m$ とし，行列を用いて

$$(*) \qquad Av = c$$

と表される $x_1, \ldots, x_n \in K$ に関する連立一次方程式を考える．これにさらに方程式

$$a_{m+1,1}x_1 + \cdots + a_{m+1,n}x_n = c_{m+1}$$

を付け加えて得られる連立一次方程式を考え，$(**)$ で表す．

1) $m = n$ とし，$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．すると方程式 $(*)$ は唯一の解 $v = A^{-1}c$ を持つ．このとき，方程式 $(**)$ が解をもつことと，$y_1, \cdots, y_n$ に関する連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} {}^tA \\ {}^tc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+1,n} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$$

が解を持つことは同値であることを示せ．
ヒント：新しい方程式は $\begin{pmatrix} & A & \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} c \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ で与えられる．一方，最後の条件を

$$(y_1 \ \cdots \ y_n)(A \ c) = (a_{n+1,1} \ \cdots \ a_{n+1,n} \ c_{n+1})$$

に書き換え（どのように？），組み合わせてみよ．

2) 1) の条件が成り立つとする．このとき，行列 $\begin{pmatrix} & A & & c \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} & c_{n+1} \end{pmatrix}$ を

左基本変形することにより $\begin{pmatrix} & A & & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすることができることを示せ.

3) 必ずしも $m=n$ とは限らない状況を考える．方程式 $(*)$，$(**)$ の解空間（解全体のなす集合）をそれぞれ V, W とする．また，$V \neq \varnothing$ であるとする．このとき，$V=W$ であることと，行列

$$\begin{pmatrix} & A & & c \\ a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,n} & c_{m+1} \end{pmatrix}$$

を左基本変形することにより $\begin{pmatrix} & A & & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすることができることは同値であることを示せ.

問 3.5. $x_1, \ldots, x_n$ に関する K の元を係数とする連立一次方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases} \qquad (a_{ij}, c_i \in K)$$

が与えられたとし，これを数ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ に関する方程式とみなす．また，$w = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ として，V_w を $(*)$ の解空間とする.

1) $v_1 \in V_{w_1}$，$v_2 \in V_{w_2}$ であれば $v_1 + v_2 \in V_{w_1+w_2}$ が成り立つことを示せ.
2) $V_w \neq \varnothing$ であることと $(*)$ が解を持つことは同値であることを示せ.
3) $v \in V_w$ を一つ固定する．$T_v\colon V_w \to V_0$ を $T_v(u) = u - v$ により定めると，確かに $T_v(u) \in V_0$ であって，更に T_v は全単射であることを示せ.

（以上）