数学 II（理科 I 類）　講義資料（2008.4.22）

ここでは K^2 や K^3 内の直線や平面についての基本的な事項のいくつかをまとめておく．連立一次方程式の一般的な解法はここでの議論を系統的に行ったものと考えることが出来る．

以下, xy 平面や xyz 空間 (一般にはあまりこのような呼び方はしないが, ここでは便宜上このように呼ぶ.) の点を列ベクトルを用いて表すことにする．xy 平面は $\mathbb{R}^2$ と, xyz 空間は $\mathbb{R}^3$ と同一視できる．より一般に K^n の場合も扱うが, 慣れないうちは $K = \mathbb{R}$ だと考えればよい.

1. 直線・平面と超平面

定義 1.1. 　1) K^n の部分集合 L であって, ある $v, c \in K^n$, $v \neq 0$, を用いて

$$L = \{x \in K^n \mid \exists t \in K,\, x = tv + c\}$$

と表されるものを K^n 内の直線と呼ぶ. v を L の方向ベクトルと呼ぶ.

2) K^n の部分集合 H であって, ある $a_1, \cdots, a_n, c \in K$, $(a_1, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$, を用いて

$$H = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \;\middle|\; a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + c = 0 \right\}$$

と表されるものを K^n の超平面と呼ぶ. $K = \mathbb{R}$ の時は $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ を, $K = \mathbb{C}$ の時は $\begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \vdots \\ \overline{a_n} \end{pmatrix}$ をそれぞれ H の法線ベクトルと呼ぶ. ここで $a \in \mathbb{C}$ について, $\overline{a}$ で a の共役複素数を表す. K^3 の超平面をしばしば K^3 内の平面と呼ぶ (命題 1.9 を参照).

注 1.2. 直線の方向ベクトル, 超平面の法線ベクトルは一般には一意的ではない.

補題 1.3. 直線, 超平面は空集合ではない.

証明は易しいので省略する. 各自試みよ.

命題 1.4. K^2 内の直線は K^2 の超平面であり, 逆も正しい.

証明. L を K^2 内の直線とすると, ある $v, c \in K^2$, $v \neq 0$, が存在して $L = \left\{x \in K^2 \;\middle|\; \exists t \in K, x = tv + c\right\}$ が成り立つ. ここで, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ と置くと

$$x_1 = tv_1 + c_1,$$
$$x_2 = tv_2 + c_2$$

が成り立つ. 従って, $v_2x_1 - v_1x_2 - (v_2c_1 - v_1c_2) = 0$ が成り立つ. そこで

$$H = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 \;\middle|\; v_2x_1 - v_1x_2 - (v_2c_1 - v_1c_2) = 0 \right\}$$

と置くと, $L \subset H$ である. 逆に $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in H$ とすると, $v_2x_1 - v_1x_2 - (v_2c_1 - v_1c_2) = 0$ が成り立つ. $v_1 \neq 0$ であれば, $x_2 = \frac{1}{v_1}(v_2x_1 - (v_2c_1 - v_1c_2))$ が成り立つので,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v_2}{v_1} \end{pmatrix} x_1 - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_2c_1 - v_1c_2}{v_1} \end{pmatrix} = \frac{x_1 - c_1}{v_1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．従って $x \in L$ である．$v_1 = 0$ である時には, $v \neq 0$ より $v_2 \neq 0$ であることを用いて上と同様に考えれば $x \in L$ であることがわかる．従って $H \subset L$ なので $L = H$ である．ところで, $v \neq 0$ より $(v_2, -v_1) \neq (0,0)$ であるから, H は K^2 の超平面である．従って K^2 内の直線は K^2 の超平面である．

H' を K^2 の超平面とすると, ある $a_1, a_2, c \in K$, $(a_1, a_2) \neq (0,0)$, が存在して

$$H' = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 \;\middle|\; a_1x_1 + a_2x_2 + c = 0 \right\}$$

が成り立つ．ここで, $a_1 \neq 0$ であれば $C = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a_1} \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 \neq 0$ であれば $C = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{a_2} \end{pmatrix}$ として,

$$L' = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 \;\middle|\; \exists t \in K,\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} + C \right\}$$

と置けば, 上と同様の議論により $H' = L'$ であることが示される．$\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} \neq 0$ であるから, L は直線であるので K^2 の超平面は K^2 内の直線である． □

$\mathbb{R}^3$ 内の直線が日常的な意味での空間内の直線を表していると考えることは, 定義の意味を図形的に考えてみれば自然であろう．一方, 次のように考えれば $\mathbb{R}^3$ の超平面が空間内の平面を表すと捉えることが出来る．

まず, 次の事実に注意する．

定理 1.5. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *が直交するのは* $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$ *の時, その時のみである．*

ただし, 零ベクトルは任意のベクトルと直交するとみなす．

証明. x, y は共に零ベクトルでは無いとして示す．$v \in \mathbb{R}^3$ について $\|v\|$ で v の長さを表すことにすると, ピタゴラスの定理より x と y が直交することは

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2$$

が成り立つことと同値である．この式を成分を用いて表せば,

$${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2$$

であるが, これを整理すれば $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$ を得る． □

$H = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + c = 0 \right\}$ を $\mathbb{R}^3$ 内の平面とする．しばらく $c = 0$ とする．すると, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in H$ は $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ が直交することと同値である．例えば $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の時などを考えれば, H が日常的な意味での平面を表すとするのは妥当であると考えられる．c が一般の時には, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in H$ を一つ選ぶ ($H \neq \varnothing$ に注意). $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix}$ とすれば $x \in H$ は $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = 0$ と同値であるので, H の代わりに $H' = \left\{ X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = 0 \right\}$ を考える．H' は H を平行移動して得られる図形であるが, H' が平面であることはすでにわかっているので H も平面を表すことがわかる．

K^2 内の直線は方向ベクトルを用いるか, あるいは, 法線ベクトルを用いて (K^2 の超平面として) 表すことが出来た．一方, K^3 内の平面も次のように「方向」ベクトルを用いて表すことが出来る．実際には平面は広がりを持つので平面上の点を表すには 2 本のベクトルが必要となる (これは, 平面上の点を表すには座標変数が 2 つ必要であることに対応する).

定義 1.6. K^n の部分集合 P が K^n 内の平面であるとは,

$$P = \{ x \in K^n \mid \exists t, s \in K,\, x = tv + sw + p \}$$

が成り立つことである．ここで, $v, w, p \in K^n$ であって, $v, w \neq 0$ かつ v, w は互いに平行ではないとする．

ここで, $v, w \in K^n$, $v, w \neq 0$, が互いに平行であるとは次のように定める．

定義 1.7. $v, w \in K^n$, $v, w \neq 0$, が互いに平行であるとは, ある $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, が存在して $w = \lambda v$ が成り立つことを言う．

補題 1.8. K^n 内の平面は空集合ではない．

この補題も易しいので証明は省略する．

例えば $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の時には P は xy 平面と平行な平面を表す．v, w により座標軸を定めていると考えれば, $\mathbb{R}^3$ 内の平面が日常的な意味での平面を表すとしても不自然ではないと考えられる．

この平面の定義は定義 1.1. 2) とは異なる．それでも定義 1.1. 2) において K^3 の超平面を K^3 内の平面と呼んだのは次が成り立つからである．

命題 1.9. K^3 の超平面は K^3 内の平面であり, 逆も正しい．

証明. $H = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^3 \;\middle|\; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + c = 0 \right\}$ を K^3 の超平面とする．a_1, a_2, a_3 のいずれかは 0 ではないので $a_1 \neq 0$ とする．そのほかの場合でも議論は同様である．やや天下り的であるが, $v = \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と定め,

$$P = \left\{ x \in K^3 \;\middle|\; \exists t, s \in K,\, x = tv + sw + p \right\}$$

と置く．$x \in H$ であれば, $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + c = 0$ であるから

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{c}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つので $x \in P$ である．また, 直接計算することにより $x \in P$ ならば $x \in H$ であることがわかる．したがって $H = P$ である．一方, v, w は互いに平行ではないから P は平面であるので, K^3 の超平面は K^3 内の平面である．

P' を K^3 内の平面であるとし, $P' = \left\{ x \in K^3 \;\middle|\; \exists t, s \in K,\, x = tv + sw + p \right\}$ とする．$x \in P'$ とし, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ とそれぞれ成分で表す．$x \in P'$ はある $t, s \in K$ に対して

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tv_1 + sw_1 + p_1 \\ tv_2 + sw_2 + p_2 \\ tv_3 + sw_3 + p_3 \end{pmatrix}$$

が成り立つことと同値である．ここで, $(a_1, a_2, a_3) = (v_2w_3 - v_3w_2, -v_1w_3 + v_3w_1, v_1w_2 - v_2w_1)$, $c = -(a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3)$ と置くと, v, w が共に 0 でなく, また互いに平行でないことから $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ である．そこで

$$H' = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^3 \;\middle|\; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + c = 0 \right\}$$

と置けば H' は K^3 の超平面であり, さらに $x \in H'$ であることが直接計算することによりわかる．従って $P' \subset H'$ である．逆に $x \in H'$ とする．a_1, a_2, a_3 のいずれかは 0 で無いので, ここでは $a_2 \neq 0$ とする (ほか

の場合も同様である). $a_2 = -v_1w_3 + v_3w_1 \neq 0$ であるので,

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a_1}{a_2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a_3}{a_2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{a_2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - p_1) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a_1}{a_2} \\ 0 \end{pmatrix} + (x_3 - p_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a_3}{a_2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $c = -(a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3)$ を用いた. $\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{v_1w_3 - v_3w_1} \begin{pmatrix} w_3 & -w_1 \\ -v_3 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix}$ と置く. すると,

$$\begin{aligned} tv + sw &= t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \frac{1}{v_1w_3 - v_3w_1} \begin{pmatrix} w_3 & -w_1 \\ -v_3 & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{v_2w_3 - v_3w_2}{v_1w_3 - v_3w_1} & \frac{-v_2w_1 + v_1w_2}{v_1w_3 - v_3w_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - p_1) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{v_2w_3 - v_3w_2}{-v_1w_3 + v_3w_1} \\ 0 \end{pmatrix} + (x_3 - p_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{-v_2w_1 + v_1w_2}{-v_1w_3 + v_3w_1} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 - p_1) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a_1}{a_2} \\ 0 \end{pmatrix} + (x_3 - p_3) \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a_3}{a_2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って $x = tv + sw + p$ であるから $H' \subset P'$ が成り立つ. 一方, $P' \subset H'$ であったから $P' = H'$ である. H' は K^3 の超平面であるから, K^3 内の平面は K^3 の超平面である. □

2. K^2 内の二直線の交わり

直感的には平面内の相異なる二直線は交わらないか, ただ一点で交わる. より詳しく, 平面内の相異なる二直線は平行であるか, あるいはただ一点で交わる. 前節の定義に従えば, 平面内の二直線の交わりの様子は連立方程式

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + c_1 = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + c_2 = 0 \end{aligned}$$

の解の様子を調べればわかるはずである. ここではこれらの二式が直線をあらわすとし, 第一式が表す図形を L_1, 第二式が表す図形を L_2 と置く. ただし, $L_1 = L_2$ の場合も考慮に入れることにする.

実際に解の様子を調べる前に, 次に注意する.

補題 2.1. L_1, L_2 が共に直線であるとする.

1) $a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \neq 0$ であることと, L_1, L_2 は互いに平行でない直線であることは同値である.

2) $a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}=0$ であることと, L_1, L_2 は互いに平行な直線であることは同値である.

ただし, 二本の直線が互いに平行であるとはそれぞれの方向ベクトルが互いに平行であることを言う. 特に二本の直線が実は同一の直線の場合にも互いに平行であると言う.

<u>証明</u>. 2) から示す. L_1, L_2 が共に直線であるから, $\begin{pmatrix} a_{1,2} \\ -a_{1,1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{2,2} \\ -a_{2,1} \end{pmatrix}$ はいずれも零ベクトルではない. もし $\begin{pmatrix} a_{2,2} \\ -a_{2,1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ -a_{1,1} \end{pmatrix}$ がある $\lambda \in K$ について成り立っていれば, $a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2} = a_{1,1}(\lambda a_{1,2}) - (\lambda a_{1,1})a_{1,2} = 0$ が成り立つ. 逆に, $a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}=0$ であったとする. $a_{1,1}\neq 0$ であれば, $a_{2,2}=\frac{a_{2,1}a_{1,2}}{a_{1,1}}$ が成り立つので $\begin{pmatrix} a_{2,2} \\ -a_{2,1} \end{pmatrix} = \dfrac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ -a_{1,1} \end{pmatrix}$ が成り立つ. 従って L_1 と L_2 は互いに平行である. $a_{1,1}=0$ であれば L_1 が直線であることから $a_{1,2}\neq 0$ が成り立つ. $a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}=0$ より $a_{2,1}=0$ が成り立つから, やはり L_1 と L_2 は互いに平行である.

L_1, L_2 は共に直線であるとしたから, これらの方向ベクトルは (零ベクトルではないので) 互いに平行であるか, あるいは互いに平行ではないかのいずれかであり, その一方のみが成り立つ. 従って 1) は 2) の対偶であるから 1) も成り立つ. □

さて, 最初の連立方程式を

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書き換えて, 左から $\begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$ をかければ

$$(a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が従う. この方程式は $\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ と置けば

$$(a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と同値である. もし L_1, L_2 が互いに平行でない場合には, $a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}\neq 0$ であるから最後の方程式は必ず解をもち, それは唯一である. 図形的には $L_1 \cap L_2$ は一点からなる. 一方 L_1, L_2 が互いに平行であるとする. この時には $a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}=0$ であるから, もし $\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であれば L_1 と L_2 は共通部分を持たない. つまり L_1, L_2 は相異なる, 互いに平行な二直線である. 一方 $\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとする. $\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ であったから, $\begin{pmatrix} a_{2,2} \\ -a_{2,1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ -a_{1,1} \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0 \in K$, とすると $\begin{pmatrix} \lambda a_{1,2} & -a_{1,2} \\ -\lambda a_{1,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つ. $a_{1,1}\neq 0$ あるいは $a_{1,2}\neq 0$ であることに注意すると, $c_2=\lambda c_1$ が成り立つ. $\lambda \neq 0$ より

$$\begin{aligned} L_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 \;\middle|\; a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + c_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 \;\middle|\; \lambda a_{1,1}x_1 + \lambda a_{1,2}x_2 + \lambda c_1 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^2 \;\middle|\; a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + c_1 = 0 \right\} \\ &= L_1 \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, L_1 と L_2 が互いに平行な時には $L_1 = L_2$ であるか, あるいは L_1 と L_2 は共通部分を持たない (後者の場合が実際に起きることを確かめるのは容易である).

3. K^3 内の二直線の交わり (その１)

ここではまず K^3 内の二直線の交わりを定義 1.1 を直接用いて考察する．あとで示す (定理 4.5) ように K^3 内の直線は二平面の交わりとして表すことが出来る．K^3 の直線をこのように考えた上でその交わりを考察することも重要である．これについては第 5 節で軽く触れる．

L_1, L_2 を K^3 内の直線とし,

$$L_1 = \left\{x \in K^3 \mid \exists t \in K, x = tv_1 + c_1\right\},$$
$$L_2 = \left\{x \in K^3 \mid \exists t \in K, x = tv_2 + c_2\right\}$$

とする．ここで, $v_1, v_2, c_1, c_2 \in K^3$ であって, v_1, v_2 はいずれも零ベクトルではないとする．$x \in L_1 \cap L_2 \subset K^3$ は

$$(*) \qquad \exists t, s \in K, x = tv_1 + c_1 = sv_2 + c_2$$

が成り立つことと同値である．

<u>v_1 と v_2 が互いに平行な時</u>

$v_1 = \lambda v_2$, $\lambda \neq 0 \in K$, とする．$tv_1 + c_1 = t\lambda v_2 + c_1$ であるから, 条件 $(*)$ より $(t\lambda - s)v_2 = c_2 - c_1$ が成り立つ．従って, $L_1 = L_2$ が成り立つ (演習問題 1.4 も参照のこと)．まとめれば, L_1 と L_2 が互いに平行であれば, $L_1 = L_2$ であるか, あるいは $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ である (後者の場合が実際に起きることを確かめるのは容易である)．ここまでは K^2 の時と同様である．

<u>v_1 と v_2 が互いに平行ではない時</u>

補題 3.1. $tv_1 + sv_2 = t'v_1 + s'v_2$ が成り立つことと $t = t'$ かつ $s = s'$ が成り立つことは同値である．ただし, $t, s, t', s' \in K$ とする．

<u>証明</u>. $tv_1 + sv_2 = t'v_1 + s'v_2$ が成り立てば $(t - t')v_1 = (s' - s)v_2$ が成り立つ．もし $t \neq t'$ であれば, $v_1 = \frac{s'-s}{t-t'}v_2$ であるから, v_1 と v_2 が互いに平行ではなく, しかも $v_1 \neq 0$ であることに矛盾する．従って $t = t'$ である．同様に $s = s'$ も成り立つ (あるいは, $(s' - s)v_2 = (t - t')v_1 = 0$ と $v_2 \neq 0$ より $s' - s = 0$ とすることも出来る)．逆は自明である． □

条件 $(*)$ は

$$tv_1 - sv_2 = c_2 - c_1$$

と同値である．上の補題により, このような $t, s \in K$ の組は存在すれば唯一つである．よって, この場合には $L_1 \cap L_2 = \{x\}$, つまり L_1 と L_2 は一点 x で交わるか, あるいは $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ である (後者の場合が実際に起きることを確かめるのはやはり容易である)．K^2 の時には互いに平行でない二直線は必ず交点を持ったが, K^3 の場合には, このように交わりを持たない場合が起きる．このような状況を L_1 と L_2 は互いに捩(ねじ)れの位置にあるという．$n \geq 3$ であれば, K^n 内には互いに捩れの位置にある直線の組が無限に存在する．

4. K^3 内の平面と平面の交わり

ここでは K^3 内の平面を K^3 の超平面として考える．定義 1.6 を用いて考察してももちろん同一の結論が得られるが, これは各自に任せる．

二平面・二超平面が互いに平行であるという概念が必要となるので, ここで述べておく．

定義 4.1. K^n の超平面

$$H_1 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \;\middle|\; a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n + c_1 = 0 \right\},$$

$$H_2 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \;\middle|\; a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n + c_2 = 0 \right\}$$

が互いに平行であるとは, H_1, H_2 の法線ベクトルが互いに平行であることを言う.

注 4.2. この定義は K^2 の二直線が互いに平行であることの一般化となっている ($n = 2$ とすれば K^2 の二直線が互いに平行であることの定義と同値な定義が得られる).

補題 4.3. K^n の超平面 H_1, H_2 が互いに平行であることと, $(a_{2,1}, \cdots, a_{2,n}) = \lambda(a_{1,1}, \cdots, a_{1,n})$ がある $\lambda \neq 0 \in K$ について成り立つことは同値である.

証明. H_1, H_2 が平行であることは $K = \mathbb{R}$ であれば $\begin{pmatrix} a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{2,n} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,n} \end{pmatrix}$ がある $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ について成り立つことと同値であるし, $K = \mathbb{C}$ であれば $\begin{pmatrix} \overline{a_{2,1}} \\ \vdots \\ \overline{a_{2,n}} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \overline{a_{1,1}} \\ \vdots \\ \overline{a_{1,n}} \end{pmatrix}$ がある $\lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$ について成り立つことと同値である. 前者は $(a_{2,1}, \cdots, a_{2,n}) = \lambda(a_{1,1}, \cdots, a_{1,n})$ と, 後者は $(a_{2,1}, \cdots, a_{2,n}) = \overline{\lambda}(a_{1,1}, \cdots, a_{1,n})$ と同値である. □

定義 4.4. K^n 内の平面

$$P_1 = \{x \in K^n \mid \exists t, s \in K,\, x = tv + sw + p\},$$
$$P_2 = \{x \in K^n \mid \exists t, s \in K,\, x = tv' + sw' + p'\}$$

が互いに平行であるとは, $\{x \in K^n \mid \exists t, s \in K,\, x = tv + sw\} = \{x \in K^n \mid \exists t, s \in K,\, x = tv' + sw'\}$ が成り立つことを言う.

つまり, P_1, P_2 を原点を通るように平行移動した時に一致することと, P_1 と P_2 は互いに平行であることは同値である.

問. $n = 3$ の場合, 定義 4.1 と定義 4.4 が一致することを確かめよ. つまり, K^3 の超平面 (K^3 内の平面) H_1, H_2 が超平面として互いに平行であることと, H_1, H_2 が平面として互いに平行であることは同値であることを示せ.

以下では K^3 の場合を扱うので, 超平面と平面は同じことである (命題 1.9) から区別しない.

P_1, P_2 を K^3 内の平面とし,

$$P_1 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^3 \;\middle|\; a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + c_1 = 0 \right\},$$

$$P_2 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^3 \;\middle|\; a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + c_2 = 0 \right\}$$

とする. ここで, $a_{1,1}, \cdots, a_{2,3}, c_1, c_2 \in K$ であって, $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}) \neq (0,0,0)$, $(a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}) \neq (0,0,0)$ とする.

$$P_1 \cap P_2 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + c_1 = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + c_2 = 0 \end{array} \right\}$$

であるから (一般的な習慣として, 条件を単に並べた場合には全て「かつ」と考え, 「または」の場合にはそのように明記する), P_1 と P_2 の交わりを調べることは連立一次方程式

(a)
$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + c_1 = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + c_2 = 0 \end{aligned}$$

の解を調べることに帰着される.

<u>P_1 と P_2 が互いに平行な時</u>

$(a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}) = \lambda(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3})$ がある $\lambda \neq 0 \in K$ について成り立つ. この時, 条件 $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + c_1 = 0$ の下で $a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + c_2 = 0$ は $c_2 - \lambda c_1 = 0$ と同値である. 実際,

$$\begin{aligned} & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + c_2 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + c_2 - \lambda \cdot 0 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + c_2 - \lambda(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + c_1) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + c_2 - (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \lambda c_1) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & c_2 - \lambda c_1 = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, 連立一次方程式 (a) は

(b)
$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + c_1 = 0, \\ c_2 - \lambda c_1 = 0 \end{aligned}$$

と同値である. よって, $c_2 = \lambda c_1$ の時, その時のみ (a) は解をもち, この時

$$P_1 \cap P_2 = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^3 \;\middle|\; a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + c_1 = 0 \right\}$$

が成り立つ. ここで, 右辺は P_1 の定義そのものであるので, $P_1 \cap P_2 = P_1$ であるが, 一方, $c_2 = \lambda c_1$ であれば, $\lambda \neq 0$ より $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + c_1 = 0$ は $a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + c_2 = 0$ と同値であるので, 右辺は P_2 にも等しい. まとめれば, P_1 と P_2 が互いに平行であれば, $P_1 = P_2$ であるか, $P_1 \cap P_2 = \varnothing$ が成り立つ.

<u>P_1 と P_2 が互いに平行ではない時</u>

$(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}) \neq (0,0,0)$ なので, 変数の順序を入れ替えて $a_{1,1} \neq 0$ としてよい. この時, 条件 $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + c_1 = 0$ の下で,

$$\begin{aligned} & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + c_2 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + c_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}0 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + c_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + c_1) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \left(a_{2,2} - \frac{a_{2,1}a_{1,2}}{a_{1,1}}\right)x_2 + \left(a_{2,3} - \frac{a_{2,1}a_{1,3}}{a_{1,1}}\right)x_3 + \left(c_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}c_1\right) = 0 \end{aligned}$$

よって, 連立方程式 (a) は

(c)
$$\begin{aligned} & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + c_1 = 0, \\ & \left(a_{2,2} - \frac{a_{2,1}a_{1,2}}{a_{1,1}}\right)x_2 + \left(a_{2,3} - \frac{a_{2,1}a_{1,3}}{a_{1,1}}\right)x_3 + \left(c_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}c_1\right) = 0 \end{aligned}$$

と同値である. ところで, P_1 と P_2 は互いに平行ではないので, $\left(a_{2,2} - \frac{a_{2,1}a_{1,2}}{a_{1,1}}\right)$ と $\left(a_{2,3} - \frac{a_{2,1}a_{1,3}}{a_{1,1}}\right)$ が共に 0 となることはない. そこで, 必要であれば x_2 と x_3 を入れ替えて, $\left(a_{2,2} - \frac{a_{2,1}a_{1,2}}{a_{1,1}}\right) \neq 0$ としてよい. (a) か

ら (c) を導いたのと同様に考えれば, (c) は

$$\text{(d)}\quad \begin{aligned} &a_{1,1}x_1 + a_{1,1}\frac{a_{1,3}a_{2,2}-a_{2,3}a_{1,2}}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}}x_3 + a_{1,1}\frac{a_{2,2}c_1-a_{1,2}c_2}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}} = 0,\\ &x_2 + \frac{a_{1,1}a_{2,3}-a_{2,1}a_{1,3}}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}}x_3 + \frac{a_{1,1}c_2-a_{2,1}c_1}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}} = 0\end{aligned}$$

と同値であることがわかるが, 更に $a_{1,1} \neq 0$ より, (d) は

$$\text{(e)}\quad \begin{aligned} &x_1 + \frac{a_{1,3}a_{2,2}-a_{2,3}a_{1,2}}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}}x_3 + \frac{a_{2,2}c_1-a_{1,2}c_2}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}} = 0,\\ &x_2 + \frac{a_{1,1}a_{2,3}-a_{2,1}a_{1,3}}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}}x_3 + \frac{a_{1,1}c_2-a_{2,1}c_1}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}} = 0\end{aligned}$$

と同値である. ここで, $v = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_{2,2}a_{1,3}-a_{1,2}a_{2,3}}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}} \\ -\dfrac{-a_{2,1}a_{1,3}+a_{1,1}a_{2,3}}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}} \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_{2,2}c_1-a_{1,2}c_2}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}} \\ -\dfrac{-a_{2,1}c_1+a_{1,1}c_2}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ と置けば, (e) は

$$\text{(f)}\quad \exists t \in K,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = tv + c$$

と同値である. 実際, x がこの形をしていれば (e) が成り立つし, 逆に x が (e) を充たせば $t = x_3$ とすれば (f) が成り立つ. (ただし, 変数の順序は必要に応じて入れ替えていることに注意せよ.) 従って, 次の定理の前半が示された.

定理 4.5. *K^3 内の互いに平行ではない二平面は必ず交わり, その交わりは直線である. 逆に, K^3 内の直線は互いに平行ではない二平面の交わりとして表すことが出来る.*

<u>証明</u>. 後半を示す. L を K^3 内の直線とし, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ を L の方向ベクトル, $p \in L$ とする. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と置く. $v_1 \neq 0$ の時, v と e_2, v と e_3 はそれぞれ平行ではないので $P_1 = \left\{ x \in K^3 \;\middle|\; \exists t, s \in K,\ x = tv + se_2 + p \right\}$, $P_2 = \left\{ x \in K^3 \;\middle|\; \exists t, s \in K,\ x = tv + se_3 + p \right\}$ と置けば P_1, P_2 はそれぞれ平面である. また, 定理の前半の証明と同様にして $P_1 \cap P_2 = L$ であることが分かる. $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$ の場合も e_1 と e_3, e_1 と e_2 を用いて同様に $P_1 \cap P_2 = L$ であるような P_1, P_2 を定めることが出来る. □

5. K^3 内の二直線の交わり (その２)

L_1, L_2 を K^3 内の直線とし,

$$L_1 = P_1 \cap P_2,$$
$$L_2 = P_3 \cap P_4$$

とする. ここで, P_1, P_2, P_3, P_4 は K^3 内の平面である. (定理 4.5 によりこのような P_1, P_2, P_3, P_4 は確かに存在する.)

$$P_i = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^3 \;\middle|\; a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + a_{i,3}x_3 + c_i = 0 \right\}$$

と K の元 $a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, c_i$ を用いて表す．ここで $i = 1,2,3,4$ である．$L_1 \cap L_2 = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4$ であるから，$L_1 \cap L_2$ を調べるためには連立方程式

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + c_1 = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + c_2 = 0, \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + c_3 = 0, \\ a_{4,1}x_1 + a_{4,2}x_2 + a_{4,3}x_3 + c_4 = 0 \end{cases}$$

の解を調べればよい．作業は複雑になるが，これも二平面の交わりと同じ要領で調べることが出来る．大雑把に言えば，まず，四つの式 (平面) を実際には三つの式 (平面) で表すことが出来なければ $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ である．四つの平面が実際には三つの平面で表されたとして，それぞれの平面の法線ベクトルを原点に始点があるとみなす．これらがどんな原点を通る平面についても，その平面に一斉に含まれることが無ければ L_1 と L_2 は一点で交わる．法線ベクトルたちがある平面に含まれる場合には，それらの平面たちの位置関係により $L_1 = L_2$ あるいは $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ が成り立つ．上の連立方程式を (平面に由来することを忘れて) $a_{i,j}$ 達が任意の K の元であることを許して考えると更にいろいろな場合が出てくる．これらの場合も含めた詳しいことはこれから扱う．

問. P を $\mathbb{R}^3$ 内の平面であるとし，

$$\begin{aligned} P &= \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists t, s \in \mathbb{R},\, x = tv + sw \right\} \end{aligned}$$

が成り立っているとする．ここで $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathbb{R}^3$ である．$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と置くと，$\mathbb{R}^3$ の任意の点 x は $x = tv + sw + ua$, $t, s, u \in \mathbb{R}$, と一意的に (ただ一通りに) 表せることを示せ．

ヒント：例えば，$P_c = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \right\}$ と置けば，P_c, $c \in \mathbb{R}$, は互いに平行な平面達であることを用いることができる．(もちろんほかにも色々な方法がある.)