２００８年度数学 II 演習（理 I 向け，足助担当）　第１２回　　　'09/1/13（火）４限

以下では特に断らなければ $K$ で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す．

**問 12.1.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とする．

1) $A$ の固有多項式を求めよ．また，$A$ の全ての固有値とそれぞれの重複度を求めよ．
2) $A$ の固有値のそれぞれについて，その固有空間を求めよ．
3) $A$ は対角化不可能であることを示せ．
4) $A$ をユニタリ行列により三角化せよ．ただし，もし $A$ の固有値が全て実数であるのならば直交行列により三角化せよ．

**問 12.2.** 1) 以下の行列（$A$ とする）が対角化可能であれば対角化し，対角化不可能であればそのことを示せ．対角化の際には $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ も明示すること．また，固有値が全て実数であるような実行列は実行列で対角化すること．

2) $A^m$, $m \in \mathbb{Z}$, を求めよ．但し $A$ が $n$ 次であれば $A^0 = E_n$ とし，また，$A^m$, $m < 0$, は $A$ が正則なときのみ $A^m = (A^{-1})^{-m}$ として定める．
注意：必ずしも $A^m$ を求めるのに対角化は必要ではないし，対角化するよりも易しい計算法が存在することもある．

a) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$　b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$　d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**問 12.3.** 以下の行列が正規行列であることを確かめ，ユニタリ行列で対角化せよ．但し，実行列については固有値が全て実数であれば直交行列で対角化せよ．

1) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & -2 & 2 \\ 2 & \sqrt{-1} & -2\sqrt{-1} \\ -2 & 2\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \end{pmatrix}$

**問 12.4.** $A \in M_n(\mathbb{C})$ を正規行列とするとき，以下を示せ．

1) $A$ がエルミート行列である．$\iff$ $A$ の固有値が全て実数である．
特に $A \in M_n(\mathbb{R})$ であって $A$ が対称行列であれば, $A$ の固有値は全て実数である．
2) $A$ が歪エルミート行列である．$\iff$ $A$ の固有値が全て純虚数である．
3) $A$ がユニタリ行列である．$\iff$ $A$ の固有値の大きさが全て $1$ である．

**定義 12.5.** $f \in K[x]$ とする．$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ の時，$X \in M_n(K)$ に対して

$$f(X) = a_0E_n + a_1X + \cdots + a_kX^k \in M_n(K)$$

と定める．このような操作を $f$ に $X$ を代入すると呼ぶ，また，右辺のような形の式を $X$ の多項式と呼ぶ．

**問 12.6** (ハミルトン・ケーリーの定理)**.** $A \in M_n(\mathbb{C})$ とし，$f_A$ を $A$ の固有多項式とする．このとき $f_A(A) = O_n$ が成り立つことを示せ．
ヒント：もし $A$ が対角化可能であれば $P^{-1}AP$ が対角行列であるように $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ をとれば $P^{-1}f_A(A)P$ の対角成分には $f_A(\alpha)$，$\alpha$ は $A$ の固有値，の形をした複素数が並ぶのでこれは $O_n$ に等しい．一般には対角化は不可能であるから，三角化を用いたり，近似を用いて対角化可能な場合に帰着するなど，何らかの考察が必要である．

**問 12.7.** $a_0, \cdots, a_{n-1} \in K$ とする．

$$V = \{K \text{ の元の列（数列）} \{x_m\} \mid x_{m+n} + a_{n-1}x_{m+n-1} + \cdots + a_0 x_m = 0\}$$

と置く．$V$ は数列の和・定数倍に関して線型空間である（線型空間であることがあやふやな場合には確かめること）．

1) $V$ は $n$ 次元であることを示せ．
2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ と置く．
$$W = \{K^n \text{ の元の列 } \{v_m\} \mid v_{m+1} = Av_m\}$$
と置く．$W$ の元の和を項ごとに $K^n$ の元としての和を取ることにより定め，また，$W$ の元の定数倍を項ごとに $K^n$ の元として定数倍することにより定める．すると $W$ は $K$-線型空間であることを示せ．
3) $f\colon V \to W$ を，数列 $\{x_m\}$ に対して第 $l$ 項 $v_l$ が $v_l = \begin{pmatrix} x_l \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_{l+n-1} \end{pmatrix}$ で与えられるような $K^n$ の元の列 $\{v_l\}$ を対応させる写像とする．$f(\{x_m\}) = \{v_l\}$ である．$f$ は線型同型写像であることを示せ．また，$\{v_l\} \in W$ が与えられた時，各 $v_l$ の第 1 成分を $x_l$ とし，$\{x_l\}$ を数列とみなす写像を $g$ とすると $g = f^{-1}$ であることを示せ．
4) $\{v_l\} \in W$ とすると $v_l = A^{l-1}v_1$ が成り立つことを示せ．従って $A^k$ が一般に求まれば $W$ はよくわかるといえる．
5) 2) で与えた行列 $A$ の固有多項式を求めよ．これを $f_A$ とする．
6) $f_A$ が重根を持たないことと，$A$ が対角化可能であることは同値であることを示せ．（もちろんこれは $A$ が上のような特別な形をしているから成り立つことである．）

更に話を進めるためには対角化可能でない行列を扱う必要があるのでここでは触れない.

**問 12.8.** 以下の漸化式を充たす数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ.

1) $x_n - 4x_{n-1} + x_{n-2} + 6x_{n-3} = 0.$
2) $x_n - 10x_{n-2} + 9x_{n-4} = 0.$

**問 12.9.** $A, B, C$ の三人の間で一つの盥(たらい)を次の条件で受け渡しする.

a) $A$ が盥を持っていたら, 確率 $\dfrac{1}{2}$ でそのまま保持し, 確率 $\dfrac{1}{2}$ で $B$ に渡す.
b) $B$ が盥を持っていたら, 確率 $\dfrac{1}{3}$ でそのまま保持し, 確率 $\dfrac{1}{3}$ で $A$ に, 確率 $\dfrac{1}{3}$ で $C$ に渡す.
c) $C$ が盥を持っていたら, 確率 $\dfrac{1}{2}$ で $A$ に渡し, 確率 $\dfrac{1}{2}$ で $B$ に渡す.

最初に $A$ が盥を持っていた時, $n$ 回の受け渡しの後に $A, B, C$ が盥を持っている確率を求めよ. また, 最初に盥を持っていた者が $B$, $C$ である時にも同様の確率を求めよ.

**問 12.10.** 次の二次形式 $f$ の符号を

i) 平方完成するなどして標準形に直す.
ii) 対応する実対称行列について, その固有方程式の根の符号を調べる.

の 2 つの方法で求めよ. ここで, 符号を求めるためには必ずしも固有方程式の根を具体的に求める必要はないことに注意せよ.

1) $f(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 2\sqrt{2}xz + 2y^2 - 2\sqrt{2}yz + z^2.$
2) $f(x, y, z) = x^2 + 4xy - 2xz + y^2 + 6yz + z^2.$
3) $f(x, y, z, w) = x^2 + 4xy - 2xz + y^2 + 6yz + z^2$ (右辺に $w$ が含まれないのは誤りではない).
4) $xz - yw.$

**問 12.11.** $A' \in M_n(\mathbb{R})$ を対角成分が $\alpha_1{}^2, \cdots, \alpha_r{}^2, -\alpha_{r+1}{}^2, \cdots, -\alpha_{r+s}{}^2, \overbrace{0, \cdots, 0}^{n-(r+s)}$ であるような対角行列, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{r+s+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ とし, $A = \begin{pmatrix} A' & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix}$ とする. ただし $c \in \mathbb{R}$ とする.

$\mathbb{R}^{n+1}$ 上の二次形式 $Q$ を $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ の時 $Q(v) = {}^t vAv$ として定めると, $b \neq 0$ であれば

$\operatorname{sgn} Q = (r+1, s+1)$ であり，$b = 0$ であれば $\operatorname{sgn} Q = \begin{cases} (r+1, s) \\ (r, s+1) \\ (r, s) \end{cases}$ のいずれかが成り立つことを示せ.

**記号 12.12.** $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と置く.

問 12.14 では講義で与えなかった次の定理を証明する.

**定理 12.13.** $A$ を実正規行列とすると，ある直交行列 $P \in \mathrm{O}_n$ が存在して

$$P^{-1}AP = O_m \oplus D_p \oplus (-D_q) \oplus r_1R(\theta_1) \oplus \cdots \oplus r_sR(\theta_s)$$

が成り立つ．ここで，$D_p$, $D_q$ は対角成分が正の対角行列であって，$r_i > 0$ である．また，$m + p + q + 2s = n$ であって，いずれの $i$ についても $R(\theta_i) \neq \pm E_2$ である（$\theta_i$ が $\pi$ の整数倍ではない）．$m, p, q, s$ は一意的であり，$D_p$，$D_q$ は対角成分の並べ替えを除き，また，$r_1R(\theta_1), \cdots, r_sR(\theta_s)$ は並べ方を除いてそれぞれ一意的である．更に $P$ は $\det P > 0$ であるように選ぶことができる.

**問 12.14** (定理 12.13 の証明).
1) 実数でない複素数 $\alpha$ が $A$ の固有値であれば $\overline{\alpha}$ も $A$ の固有値であり，$\alpha$ と $\overline{\alpha}$ の重複度は等しいことを示せ.

ここで $A$ の実固有値のうち 0 の数を $m$，正であるものの数を $p$，負であるものの数を $q$ とする．ここで固有値の個数はいずれも重複度を込めて数える．そして，正の固有値を並べて得られる対角行列を $D_p$，負の固有値を並べて得られる対角行列の $(-1)$ 倍を $D_q$ とし，実数でない固有値を $\alpha_1, \overline{\alpha_1}, \cdots, \alpha_s, \overline{\alpha_s}$ とする．$A$ は正規行列であるからユニタリ行列により対角化可能であるので，$Q \in \mathrm{U}_n$ を適当に選び

$$Q^{-1}AQ = O_m \oplus D_p \oplus (-D_q) \oplus \begin{pmatrix} \alpha_1 & \\ & \overline{\alpha_1} \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} \alpha_s & \\ & \overline{\alpha_s} \end{pmatrix}$$

が成り立つとしてよい．実固有値に属する固有ベクトルは実ベクトルであるように選ぶことができるから $Q = (q_1 \ \cdots \ q_n)$ とすれば $q_1, \cdots, q_{m+p+q}$ は実ベクトルとしてよい．そこで $j \leq m + p + q$ の時 $p_j = q_j$ と置く．また，$\overline{A} = A$ であるから $Aq_i = \alpha_i q_i$ であれば $A\overline{q_i} = \overline{\alpha_i}\,\overline{q_i}$ であるので，$i > m + p + q$ であれば $q_{i+1} = \overline{q_i}$ とすることができる.

2) $i > m + p + q$ の時 $p_i, p_{i+1} \in \mathbb{R}^n$ と $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ を条件

$$\sqrt{2}\,q_i = p_i - \sqrt{-1}p_{i+1},$$
$$\alpha_i = a_i + \sqrt{-1}b_i$$

により定めると

$$Ap_i = a_i p_i + b_i p_{i+1},\ Ap_{i+1} = -b_i p_i + a_i p_{i+1}$$

が成り立つことを示せ．

最後の式を行列で表せば

$$A(p_i\ p_{i+1}) = (p_i\ p_{i+1})\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$$

である．

3) $\{p_1, \cdots, p_{r_1+r_2}, p_{r_1+r_2+1}, \cdots, p_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底であることを示せ．
ヒント：$j \leq m+p+q < 2i+1$ の時

$$\langle p_j, p_{2i+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle p_j, q_{2i+1}\rangle + \langle p_j, \overline{q_{2i+1}}\rangle),$$
$$\langle p_j, p_{2i+2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{-2}}(\langle p_j, q_{2i+1}\rangle - \langle p_j, \overline{q_{2i+1}}\rangle)$$

が成り立つ．また，$2i+1, 2j+1 > m+p+q$ とすると

$$2\langle q_{2i+1}, q_{2j+1}\rangle = (\langle p_{2i+1}, p_{2j+1}\rangle + \langle p_{2i+2}, p_{2j+2}\rangle) + \sqrt{-1}(\langle p_{2i+2}, p_{2j+1}\rangle - \langle p_{2i+1}, p_{2j+2}\rangle)$$
$$2\langle q_{2i+1}, q_{2j+2}\rangle = (\langle p_{2i+1}, p_{2j+1}\rangle - \langle p_{2i+2}, p_{2j+2}\rangle) + \sqrt{-1}(\langle p_{2i+2}, p_{2j+1}\rangle + \langle p_{2i+1}, p_{2j+2}\rangle)$$

が成り立つ．一方

$$\langle q_{2i+1}, q_{2j+1}\rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$
$$\langle q_{2i+1}, q_{2j+2}\rangle = 0$$

である．

そこで $P = (p_1\ \cdots\ p_n)$ と置けば $P \in \mathrm{O}_n$ である．また，$r_i = |\alpha_i|$ と置けば $\alpha_i$ は実数ではないので $r_i > 0$ である．

4) $\dfrac{\alpha_i}{r_i} = \cos\theta_i + \sqrt{-1}\sin\theta_i$ と表す．

$$P^{-1}AP = O_m \oplus D_p \oplus (-D_q) \oplus r_1 R(\theta_1) \oplus \cdots \oplus r_s R(\theta_s)$$

が成り立つことを $p_1, \cdots, p_n$ の定め方に注意して確かめよ．

$\alpha_i$ は実数ではないので $R(\theta_i) \neq \pm E_2$ である．$Q \in \mathrm{O}_n$ について $Q^{-1}AQ = O_{m'} \oplus D_{p'} \oplus (-D_{q'}) \oplus r'_1 R(\theta'_1) \oplus \cdots r'_{s'} R(\theta'_{s'})$ が成り立てば，$P^{-1}AP$ と $Q^{-1}AQ$ の固有値はともに $A$ の固有値と重複度を込めて等しいことから定理の主張にあるような一意性が成り立つ．

最後に，$\det P < 0$ である時には $P = (p_1 \ \cdots p_n)$ の代わりに $P' = (-p_1 \ \cdots p_n)$ を考えれば $P'^{-1}AP' = P^{-1}AP$ であって $\det P' > 0$ である．$P' \in \mathrm{O}_n$ も成り立つ．

対角化可能な正方行列は射影に重みをつけて足し上げたものと考えることができる．ここでは以下の事実を証明抜きで認める．証明は難しくないので必要に応じて教科書を参照するなどして各自試みよ．

**定理 12.15.** $A \in M_n(\mathbb{C})$ を対角化可能な行列とする．このとき，$P_1, \cdots, P_r \in M_n(\mathbb{C})$（但し，いずれの $P_i$ も $O_n$ でない）と相異なる複素数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ で次の性質を持つものが順序の入れ替えを除いて一意的に存在する．

1) $P_1 + \cdots + P_r = E_n$.
2) $P_iP_j = \begin{cases} P_i, & i = j, \\ O_n, & i \neq j \end{cases}$.
3) $A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_r P_r$.

このような分解を $A$ のスペクトル分解と呼ぶ．また，$A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_r P_r$ が $A$ のスペクトル分解であれば $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ は $A$ の相異なる固有値全体と一致する．$A \in M_n(\mathbb{R})$ であって，全ての固有値が実数であれば $P_1, \cdots, P_r$ は実行列にとれる．

$A \in M_n(\mathbb{C})$ を対角化可能な行列とし，$A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_r P_r$ を $A$ のスペクトル分解とする．$P_i^2 = P_i$，$P_iP_j = O$（$i \neq j$）であることから，$A^k = {\alpha_1}^k P_1 + \cdots + {\alpha_r}^k P_r$ が成り立つ．

**問 12.16.** $A \in M_n(K)$ を対角化可能とし，$A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_r P_r$ を $A$ のスペクトル分解とする．$f \in K[x]$ のとき，$f(A) = f(\alpha_1)P_1 + \cdots + f(\alpha_r)P_r$ が成り立つことを示せ．

$f_k$, $k = 1, \cdots, r$ を

$$f_k(\alpha_j) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

を充たすような函数とすると，$f_k(A) = P_k$ が成り立つ．このような函数は確かに存在する．実際，$r = 1$ であれば $f_1(x) = 1$ とすればよく，$r > 1$ であれば差積（問 5.7）を用いて

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \frac{\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}, x, \alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_r)}{\Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)} \\ &= \frac{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_{k+1})\cdots(x-\alpha_r)}{(\alpha_k-\alpha_1)\cdots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\cdots(\alpha_k-\alpha_r)} \end{aligned}$$

と定めればよい（確かめよ）．ここまでは $A$ が対角化可能であるとしたが，一般には次が成り立つ．

**定理 12.17.** $A \in M_n(K)$ とする．$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ を $A$ の相異なる固有値全体とし，$P_1, \cdots, P_r$ を上の方法で定める．このとき $P_1 + \cdots + P_r = E_n$ が成り立つ．また，任意の $i, j$ について $P_iP_j = P_jP_i$ が成り立つ．$A$ が対角化可能であることと $A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_r P_r$ かつ $P_iP_j = \begin{cases} P_i, & i = j, \\ O, & i \neq j \end{cases}$ が成り立つことは同値である．この条件が充たされる時には $A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_r P_r$ は $A$ のスペクトル分解を与える．また，$A$ が正規行列であれば $P_i^* = P_i$ が成り立つ．

つまり，$A$ が対角化可能でない時にスペクトル分解をそのまま真似しようとしてもうまくいかない．

**問 12.18.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ とする．

1) $A$ は実対称行列であるから直交行列により対角化可能である．そこで $A$ を直交行列により対角化せよ．
2) $P \in \mathrm{O}_3$ とし，$P^{-1}AP$ は対角行列であるとする．対角成分を左上から順番に $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とする．$X_i$，$i = 1, 2, 3$，を $(i, i)$ 成分が 1 であってその他の成分は全て 0 であるような $M_3(\mathbb{R})$ の元とする．$P_i = PX_iP^{-1}$ と定めると $A = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$ であって，これは $A$ のスペクトル分解であることを示せ．
3) 定理 12.17 の方法で $A$ のスペクトル分解を求めよ．

**問 12.19.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ と置く．

1) $A$ が対角化可能なのは $t \neq 1$ の時，その時のみであることを示せ．
2) $P_1$ あるいは $P_1, P_2$ を定理 12.17 の方法で求めよ（$P$ がいくつ必要になるかも考えること）．
3) 定理 12.17 の前半（「$A$ が対角化可能」以前）が $t$ に依らず成り立つことを確かめよ．
4) 定理 12.17 の後半を確かめよ．つまり，後半部分が成り立つのは丁度 $t \neq 1$ の時のみであることを示せ．
5) $t, s \in \mathbb{R}$ とし，$A = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ と置く．この $A$ について上の 1) から 4) までの問に答えよ．

**問 12.20** (ジョルダン標準形の一番基本的な場合)**.** $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．$A$ の固有値は $\alpha$ のみであって，$\alpha$ に属する $A$ の固有空間は 1 次元であるとする．

1) $N_n \in M_n(\mathbb{C})$ を $N_1 = (0)$ 及び $n > 1$ の時 $N_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ により定める．

$\alpha E_n + N_n$ は上の条件を充たすことを示せ．

2) $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を $f(v) = (A - \alpha E_n)v$ により定める．$\dim \mathrm{Im}\, f = n - 1$ であることを示せ．

3) $f$ を $p$ 回合成した写像を $f^p$ とする．$f^p = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{p}$ である．$V_k = \mathrm{Im}\, f^k$ とすれば $V_{k+1} \subset V_k$ であることと，$f(V_k) = V_{k+1}$ であることを示せ．

4) $\dim \mathrm{Im}\, f^{p-1} \leq \dim \mathrm{Im}\, f^p + 1$ であることを示せ．

ヒント：$f$ を $V_{p-1}$ から $V_{p-1}$ への写像とみなしたものを $g$ とすれば $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}\, f^p$ である．また，$\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$ である．

5) $(A - \alpha E_n)^n = O_n$ であって，$(A - \alpha E_n)^{n-1} \neq O_n$ であることを示せ．

6) $v \in \mathbb{C}^n$ を $\alpha$ に属する $A$ の固有ベクトルとする．ある $w \in \mathbb{C}^n$ が存在して $v = (A - \alpha E_n)^{n-1} w$ が成り立つことを示せ．

7) $w_0 = w$ とし，$i > 0$ の時 $w_i = (A - \alpha E_n)^i w$ と置く．$\{w_0, \cdots, w_{n-1}\}$ は $\mathbb{C}^n$ の基底であることを示せ．

8) 行列 $P$ を $P = (w_{n-1} \ \cdots \ w_0)$ により定めれば $P$ は正則であって $P^{-1}AP = \alpha E_n + N_n$ が成り立つことを示せ．

$\alpha E_n + N_n$ の形の行列を $n$ 次のジョルダンブロックと呼ぶ．一般に正方行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が与えられた時，適当に $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を取ると $P^{-1}AP$ は適当なジョルダンブロックの直和（対角線上に並べて得られる行列）にすることができる．全てのジョルダンブロックが 1 次である場合が対角化可能な場合である．

（以上）