以下では特に断らなければ K で $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 6.1. 線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をそれぞれ

$$\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x+y \\ y \end{pmatrix}, \quad \psi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ 2x+y-3z \\ x-y \end{pmatrix}$$

により定める.

1) $\psi \circ \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を具体的に計算し，表現行列を求めよ.
2) $\psi \circ \varphi$，φ，ψ の表現行列をそれぞれ A, B, C とするとき $A = CB$ が成り立つことを確かめよ.

問 6.2. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ のとき $f(v) = \begin{pmatrix} x^n + y + z \\ x + y \end{pmatrix}$ として定める. ただし n は正の整数であるとする．f が線型写像であることと $n = 1$ であることは同値であることを示せ.

問 6.3. 線型写像 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は線型同型写像になりえないことを示せ.
※ 次元について知らなくとも $\mathbb{R}$ のある特徴に注目すれば簡単に解ける.

問 6.4. $\mathbb{R}^3$ の元 v_1, v_2, v_3 について，条件

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を充たす $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線型写像について考える.

1) 以下のように v_1, v_2, v_3 を定める時，上の条件を充たす f が存在するならばそれを求め，存在しないのであればそのことを示せ.

   (a) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

   (b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

2) $A = (v_1 \ v_2 \ v_3)$ とする．上の条件を充たす f が存在することと，A が正則であることは同値であることを示せ．また，A が正則な時に上の条件を充たす f の表現行列を A を用いて表せ.

（以上）