２００８年度数学 II 演習（理 I 向け）　第４回　　　　　　'08/6/3（火）４限

以下では特に断らなければ K は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

問 4.1. $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,m}(K)$ を $A = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} E_{r'} & O \\ O & O \end{pmatrix}$, ただし E_r は r 次単位行列, として定める.

1) $AB = E_s$, $BA = E_{s'}$（但し，$s, s' > 0$）が成り立つならば $m = n = r = r' = s = s'$ が成り立つことを示せ.

2) $AB = E_s$ がある $s > 0$ について成り立つが, $BA = E_{s'}$ はいかなる $s' > 0$ についても成り立たないような A, B の例を挙げよ.

従って「$A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,m}(K)$ について，$AB = E_m$ が成り立てば $BA = E_n$ が成り立つ」は $m = n$ の時のみ成り立つ．この主張は $m = n$ であっても $m = n = +\infty$ に相当する場合には成り立たない．問 4.6 を見よ.

問 4.2. 以下の方程式はいずれも $x_1, \cdots, x_n$ に関する方程式である．それぞれの解空間を $\{v \in K^n \mid v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s + d\}$ のように表せ.

1) $n = 8$.

$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 = 0, \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 = 0, \\ x_5 + 2x_6 + x_8 = 0. \end{cases}$$

2) $n = 5$.

$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{-1}x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_4 - 3\sqrt{-1}x_5 = 0. \end{cases}$$

3) $n = 8$.

$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 + x_7 + 3x_8 = 4, \\ x_3 + 2x_4 + x_6 - x_8 = -6, \\ x_5 + 2x_6 + x_8 = 2. \end{cases}$$

4) $n = 5$.

$$\begin{cases} x_1 + \sqrt{-1}x_3 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + \sqrt{-1}x_4 = 0, \\ \sqrt{-1}x_2 - (3 - 2\sqrt{-1})x_3 + x_4 - \sqrt{-1}x_5 = 0. \end{cases}$$

問 4.3. 次の行列はいずれも正則である．逆行列を求めよ．また，各々の行列を基本行列の積として表せ（余裕があれば行列式も求めてみよ）.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$　3) $\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 2 - \sqrt{-1} & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 - 3\sqrt{-1} & -1 + 4\sqrt{-1} \end{pmatrix}$

問 4.4. V, W を集合とし，$f\colon V \to W$ を写像とする．

1) 命題　$v_1, v_2 \in V$ について,「$f(v_1) = f(v_2)$ が成り立てば $v_1 = v_2$ が成り立つ」の「　」の部分を論理記号（$\forall$, $\exists$ $\Rightarrow$ 等）を用いて表せ.
2) 命題　「任意の $w \in W$ についてある $v \in V$ が存在して $w = f(v)$ が成り立つ」を論理記号を用いて表せ.
3) 「f が単射でない」ことを論理記号で表し，そのような f, V, W の例を挙げよ.
4) 「f が全射でない」ことを論理記号で表し，そのような f, V, W の例を挙げよ.

問 4.5. $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$ について，以下の問に答えよ.

1) $g_1, g_2 \in G$ であれば $g_1 + g_2 \in G$, $g_1 g_2 \in G$ が成り立つことを示せ.
2) $f\colon \mathbb{C} \to G$ を $f(x+\sqrt{-1}y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ で定める．このとき f は全単射であることを示せ.
3) $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2),\ f(0) = O_2$ が成り立つことを示せ．また，$g = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ の時，$f\left(-f^{-1}(g)\right)$ を求め，g で表せ.
4) $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2)$，$f(1) = E_2$ が成り立つことを示せ.
5) $g = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ について，$f^{-1}(g) \neq 0$ であるための条件を求めよ．また，その条件が成り立つ時 $f\left(\dfrac{1}{f^{-1}(g)}\right)$ を求め, g で表せ.
6) $g = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ の時，$f\left(\overline{f^{-1}(g)}\right)$ を求め，g で表せ．また，$f\left(\left|f^{-1}(g)\right|^2\right)$ を求め，g で表せ.
7) $f(re^{2\pi\sqrt{-1}\theta})$（$r, \theta \in \mathbb{R}$）を求めよ．また，$f(e^{x+\sqrt{-1}y})$（$x, y \in \mathbb{R}$）を求めよ.

問 4.5 から分かるように，通常の計算に関する限り $\mathbb{C}$ と G を f を通じて同じものと考えて差し支えない.

問 4.6. $\mathbb{R}[\,t\,] = \{$ 実数を係数とする t に関する多項式 $\}$ とする．$f \in \mathbb{R}[\,t\,]$ の時（f は t に関する多項式である）, 多項式 $\varphi(f) \in \mathbb{R}[\,t\,]$ を $\varphi(f)(t) = tf(t)$ により定める．$f(t) = 1+t$ であれば $\varphi(f)(t) = t+t^2$ である．また, $f \in \mathbb{R}[\,t\,]$ の時, $\psi(f) \in \mathbb{R}[\,t\,]$ を $\psi(f)(t) = \dfrac{f(t) - f(0)}{t}$ により定める．$f(t) = 1 + 2t$ であれば $\psi(f)(t) = 2$ である.

1) 任意の $f \in \mathbb{R}[\,t\,]$ について $\psi(\varphi(f)) = f$ が成り立つことを示せ.
2) $\varphi(\psi(f)) = f$ は必ずしも成り立たないことを示せ.

問 4.6 の結論は主張「$A, B \in M_n(K)$ が $AB = E_n$ を充たせば $BA = E_n$ が成り立つ」は n が有限の値でないと成り立たないことを示している．このことは直感的には次のように説明できる（数学的に厳密な説明ではない）．$\mathbb{R}[\,t\,]$ の元を係数だけ抜き出すと，例えば $1+t$ には $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $1+2t-3t^2$ には $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ といったように列ベクトルを対応させることができる．ただし，いくらでも次数の高い多項式が存在するから，実際にはサイズを揃えるために $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\0\\\vdots\end{pmatrix}$ などと，無限個の成分を用意しておく必要がある．ここで，サイズが無限大になってしまうので本当のところはよく分からないが，直感的に φ と ψ を「行列」で表してみると φ, ψ はそれぞれ

$$\begin{pmatrix}0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots\end{pmatrix}$$

で表される（上から j 番目の成分が x^j の係数であることに注意せよ）．これらの「行列」をそれぞれ A, B とすると $BA = \begin{pmatrix}1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots\end{pmatrix}$ なのでいかにも単位行列のようであるが，一方，$AB = \begin{pmatrix}0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots\end{pmatrix}$ となり，これはいかにも単位行列ではなさそうである．これらのことを正確に述べるためには後日扱う「線型空間「線型写像」などの概念が必要である．

（以上）