２００８年度数学 II 演習（理 I 向け）　第３回　　　　　　'08/5/20（火）４限

以下では特に断らなければ K は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ を表す.

定義 3.1. $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ の時, (i,j)-成分が $\overline{a_{ij}}$ であるような $M_{m,n}(\mathbb{C})$ の元を A の複素共役と呼び, $\bar{A}$ で表す. $\frac{1}{2}(A+\bar{A})\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ を A の実部, $\frac{1}{2\sqrt{-1}}(A-\bar{A})\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ を A の虚部と呼び, それぞれ $\operatorname{re}A$, $\operatorname{im}A$ で表す.

$A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ であれば $\bar{A}=\operatorname{re}A-\sqrt{-1}\operatorname{im}A$ が成り立つ.

問 3.2. $A, A_1, A_2\in M_{k,m}(\mathbb{C})$, $B\in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $\lambda\in\mathbb{C}$ とすると次が成り立つことを示せ.

1) $\overline{A_1+A_2}=\bar{A}_1+\bar{A}_2$.
2) $\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}$.
3) $\overline{\lambda A}=\bar{\lambda}\bar{A}$.
4) $\bar{\bar{A}}=A$.

問 3.3. 1) $A\in M_n(\mathbb{C})$, $B\in M_n(\mathbb{C})$ の時, AB の実部・虚部をそれぞれ A, B の実部・虚部を用いて表せ.

2) $A\in M_n(\mathbb{R})$ が複素行列として逆行列を持てば（つまり, $A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ であれば）, その逆行列は実行列であることを示せ（従って $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ である）.
ヒント：$B\in M_n(\mathbb{C})$ を A の複素行列としての逆行列として, $AB=BA=E_n$ の実部・虚部を考えてみよ.

問 3.4. $A\in M_{m,n}(K)$ とし, $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$, $A_{i,j}\in M_{m_i,n_j}(K)$ と区分けする（従って $m=m_1+m_2$, $n=n_1+n_2$ である）. $T\in\mathrm{GL}_n(K)$ とし, $T=\begin{pmatrix}T_{11} & o_{12}\\ o_{21} & T_{22}\end{pmatrix}$, $T_{ii}\in M_{n_i}(K)$, と区分けしたところ, o_{12}, o_{21} は共に零行列であったとする.

1) o_{12} と o_{21} のサイズを求めよ.
2) $A_{12}=0$ とする. このとき, A の A_{22} の部分を, A_{11} と A_{21} を変化させずに右基本変形できることを基本行列を用いて説明せよ. また, A_{11} の部分を A_{21} と A_{22} を変化させずに左基本変形できることを基本行列を用いて説明せよ.

問 3.5. 行列 A が

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq}\end{pmatrix}$$

のように区分けされているとき. ${}^tA$ を A_{ij} を用いて表せ.

問 3.6. 次の方程式を解け．即ち, 解が存在するかどうか判定し，存在するなら解を全て求め，存在しないならばそのことを示せ.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$　　2) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$，ただし $a, b \in \mathbb{R}$.

問 3.7. 以下の行列の逆行列が存在するかどうか判定し，存在するならばそれを求めよ．また，各々の行列の rank（ランク・階数）を求めよ.

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

問 3.8. $x_1, \cdots, x_n$ に関する K の元を係数とする連立一次方程式

$$(*) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= c_m, \end{aligned} \qquad (a_{ij}, c_i \in K)$$

が与えられたとし，これを数ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ に関する方程式とみなす．また,

$w = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ として, V_w を $(*)$ の解全体のなす集合（解空間）とする.

1) $v_1 \in V_{w_1}$, $v_2 \in V_{w_2}$ であれば $v_1 + v_2 \in V_{w_1+w_2}$ が成り立つことを示せ.
2) $V_w \neq \varnothing$ と $(*)$ が解を持つことは同値であることを示せ.
3) $v \in V_w$ を一つ固定する．$T_v \colon V_w \to V_0$ を $T_v(u) = u - v$ と定めると, 確かに $T_v(u) \in V_0$ であって, 更に T_v は全単射であることを示せ.

問 3.9. $x_1, \cdots, x_n$ に関する実数を係数とする連立一次方程式

$$(*) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= c_m, \end{aligned} \qquad (a_{ij}, c_i \in \mathbb{R})$$

が与えられたとし, これを複素数ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に関する方程式とみなす.

1) $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ が方程式 $(*)$ の $\mathbb{C}^n$ における解であったとすると, $\mathrm{re}\, v \in \mathbb{R}^n$ も方程式 $(*)$ の解であり, 一方, $\mathrm{im}\, v \in \mathbb{R}^n$ は連立一次方程式

$$(**) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

（をベクトルに関する方程式とみなしたもの）の解であることを示せ. なお, 方程式 $(**)$ を（最初の方程式に）随伴する斉次方程式と呼ぶ.

2) $(*)$ において $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \neq 0$ であるとする. このとき, $(*)$ が $\mathbb{C}^n$ において解を持つことと, $\mathbb{R}^n$ において解を持つことは同値であることを示せ.

3) $(*)$ において $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = 0$ であるとする（つまり元々斉次方程式であると仮定する）. 零ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n (\subset \mathbb{C}^n)$ は明らかに解であるが, これを自明な解と呼ぶ. $(*)$ が $\mathbb{C}^n$ において非自明な解を持つことと, $\mathbb{R}^n$ において非自明な解を持つことは同値であることを示せ.
ヒント：おおよその所は 2) と同様であるが, $\mathbb{C}^n$ における解の成分がすべて純虚数なこともあり得る.

問 3.10. $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とし, $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^n$ として, 行列を用いて $Av = c$ と表される $x_1, \cdots, x_n \in K$ に関する連立一次方程式を考える. この方程式は唯一の解 $v = A^{-1}c$ を持つ. これにさらに方程式

$$a_{n+1,1}x_1 + \cdots + a_{n+1,n}x_n = c_{n+1}$$

を付け加えても解が存在することと, $y_1, \cdots, y_n$ に関する連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} {}^tA \\ {}^tc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{n+1,n} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$$

が解を持つことは同値であることを示せ.
ヒント：新しい方程式は $\begin{pmatrix} & A & \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} c \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$ で与えられる. 一方, 最後の条件を

$$(y_1 \ \cdots \ y_n)(A \ c) = (a_{n+1,1} \ \cdots \ a_{n+1,n} \ c_{n+1})$$

に書き換え（どのように？）, 組み合わせてみよ.

（以上）