２００８年度数学 II 演習（理 I 向け）　第１回　　　　　’08/4/15（火）４限

定義 1.1. 1) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 L であって, ある $v, c \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, を用いて

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in \mathbb{R},\ x = tv + c\}$$

と表されるものを $\mathbb{R}^n$ 内の（$\mathbb{R}^n$ の）直線と呼ぶ.

2) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 P であって, ある $a_1, \cdots, a_n, c \in \mathbb{R}$, ただし $(a_1, \cdots, a_n) \neq (0, \cdots, 0)$, を用いて

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = c \right\}$$

と表されるものを $\mathbb{R}^n$ の超平面と呼ぶ. $\mathbb{R}^3$ の超平面をしばしば $\mathbb{R}^3$ 内の平面と呼ぶ.

問 1.2. 1) $\mathbb{R}^3$ 内の平面

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z + 1 = 0 \right\}$$

を図示せよ.

2) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とする. $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax + by + cz + d = 0 \right\}$$

を図示せよ.

ヒント：a, b, c, d の値によって状況がいくつかに大きく分かれる. 同様の状況を一括りにすれば場合はそれほど多くないが, X が平面でない場合もあることに注意せよ.

3) $a, b, c, d, a', d' \in \mathbb{R}$ とする. $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax + by + cz + d = 0 \text{ かつ } a'x + d' = 0 \right\}$$

を図示せよ. Y は空集合であり得るので注意すること.

4) $a, b, c, d, a', d' \in \mathbb{C}$ とする. $\mathbb{C}^3$ の部分集合

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, ax + by + cz + d = 0 \text{ かつ } a'x + d' = 0 \right\}$$

の変化の様子を 3) の結果を参考にして調べよ.

ヒント：きちんとした「図示」はもはや出来ないが, 状況の変化の仕方は 3) と同様になる.

問 1.3. 1) $\mathbb{R}^2$ 内の直線は $\mathbb{R}^2$ の超平面であり, 逆も正しいことを示せ.

2) $\mathbb{R}^n$ 内の直線と超平面は交わらないか, あるいは１点で交わるか, さもなくば直線は超平面に含まれることを示せ.

問 1.4. 1) $\mathbb{R}^n$ 内の直線 $L=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists t\in\mathbb{R},\ x=tv+c\}$ と $L'=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists t\in\mathbb{R},\ x=tv'+c'\}$ が一致するための v,v',c,c' に関する条件を求めよ.

2) $\mathbb{R}^n$ の超平面 $P=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, a_1x_1+\cdots+a_nx_n=c\right\}$ と $P'=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, a_1'x_1+\cdots+a_n'x_n=c'\right\}$ が一致するための $a_1,\cdots,a_n,c,$ $a_1',\cdots,a_n',c'$ に関する条件を求めよ.

3) 定義 1.1 1) において, $c=0\in\mathbb{R}^n$ であれば L は原点を通ることを示せ. また, 定義 1.1 2) において, P が原点を通ることと $c=0\in\mathbb{R}$ であることは同値であることを示せ.

問 1.5. 1) $L_1=\left\{x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \exists t\in\mathbb{R},\ x=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right\}$ のとき, L_1 を図示せよ. ただし, $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ とする.

2) $L_1=\left\{x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1-x_2=d_1 \text{ かつ } x_2-x_3=d_2\right\}$ が成り立つような d_1,d_2 を求めよ.

3) $\mathbb{R}^3$ 内の平面 P_1,P_2 が存在して $L_1=P_1\cap P_2$ が成り立つことを示せ.

4) $\mathbb{R}^3$ 内の平面 P_1,P_2 について $L_1=P_1\cap P_2$ が成り立つための条件を求めよ.

5) L を原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の任意の直線とする. 原点を含む $\mathbb{R}^3$ 内の平面 P_1,P_2 が存在して $L=P_1\cap P_2$ が成り立つことを示せ.

6) 5) において $P_i=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+a_{i,3}x_3=0\right\}$, $i=1,2$, であったとする. また, $P_3=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, a_{3,1}x_1+a_{3,2}x_2+a_{3,3}x_3=0\right\}$ も原点を含む $\mathbb{R}^3$ 内の平面であるとする. $P_1\cap P_2\cap P_3=L$ が成り立つことと, ある 0 でない 2 次の行ベクトル $(\lambda_1\ \lambda_2)\in M_{1,2}(\mathbb{R})$ が存在して

$$\begin{pmatrix}a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix}=(\lambda_1\ \lambda_2)\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\end{pmatrix}$$

が成り立つことは同値であることを示せ.

7) 原点を含む $\mathbb{R}^3$ 内の平面 $Q_i=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, b_{i,1}x_1+b_{1,2}x_2+b_{i,3}x_3=0\right\}$,$i=1,2,$ についても $L=Q_1\cap Q_2$ が成り立つとする. このとき, ある 2 次正方行列 $A\in M_2(\mathbb{R})$ が存在して $\begin{pmatrix}b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3}\\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

8) 7) における A は逆行列を持つことを示せ. ここで, $A\in M_2(\mathbb{R})$ が逆行列を持つとは, $B\in M_2(\mathbb{R})$ であって $AB=BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ が成り立つものが存在することである.

問 1.6. 定義 1.1, 問 1.3, 1.4, 1.5 において $\mathbb{R}$ をすべて $\mathbb{C}$ に置き換えても同様のことが成り立つことを示せ.

問 1.7.

1) $z \in \mathbb{C}$ とすると, $z\bar{z} \geq 0$ が成り立つことを示せ. また, 等号は $z = 0$ の時, その時のみ成り立つことを示せ.
2) $z, w \in \mathbb{C}$ のとき, $|zw| = |z|\,|w|$ が成り立つことを示せ.
3) $z, w \in \mathbb{C}$ について $|z + w| \leq |z| + |w|$ が成り立つことを示せ.
4) $t \in \mathbb{R}$ であれば, $t \in \mathbb{C}$ とみなして $|t| = \sqrt{t\bar{t}}$ とすると t の実数としての絶対値と一致することを示せ.

問 1.8. $z \in \mathbb{C}$ のとき, $\operatorname{re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2\sqrt{-1}}$ が成り立つことを示せ.

問 1.9. $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $w \neq 0$ とする.

1) $\arg zw - (\arg z + \arg w)$ は 2π の整数倍であることを示せ.
2) $0 < \arg z < \pi$, $0 < \arg w < \pi$ であるとする. このとき, 複素平面（複素数平面, ガウス平面）における $0, 1, z$ を頂点とする三角形と, $0, w, zw$ を頂点とする三角形は相似であることを示せ. また, 相似比を求めよ.

注 1.10. 1) は $\arg zw = \arg z + \arg w$ が $2\pi\mathbb{Z}$ の任意性を除いて成り立つということに他ならない.

問 1.11 (詳しいことは冬学期に扱う)**.** $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ のとき, v と w の内積を $\langle v, w \rangle$ で表す. ($\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ である.) 内積はいくつかの性質をもつが, そのうち

(∗) $\langle v, v \rangle \geq 0$ であって, 等号は $v = 0$ の時, その時のみ成り立つ

という性質に着目し, $v, w \in \mathbb{C}^2$ に対しても同様の性質を持つような操作を考えてみる.

1) 単純に $\mathbb{R}^2$ の時と同様に $\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ とするとこれは性質 (∗) を持たないことを示せ.
2) $\langle v, w \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$ とするとこれは性質 (∗) を持つことを示せ. (問 1.6 1) も参照のこと.)

・3) 4) では $\langle v, w \rangle$ は 2) のものを用いる.

3) $v \in \mathbb{C}^2$ に対して v の長さを $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ として定める. $w \in \mathbb{R}^2$ のとき, $w \in \mathbb{C}^2$ とみなすと $\|w\|$ は通常の意味での w の長さと一致することを示せ.
4) $v \in \mathbb{C}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ について, $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$ が成り立つことを示せ.

問 1.12. 複素平面で以下の式が表す図形を図示せよ.

1) $|z-c| = r$, ただし $c, r \in \mathbb{C}$.（より正確には $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| = r\}$, $c, r \in \mathbb{C}$ のことである. 以下同様.）
2) $|z-1| + |z+1| = p$, $p > 0$. （不等号は実数に対してしか意味を持たないので, 例えば $p > 0$ のように不等号を用いた時には暗黙の内に $p \in \mathbb{R}$ を仮定する.）
3) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = c$, $c \in \mathbb{R}$.
4) $\left|z - \sqrt{-1}\right| = (\operatorname{im} z) + 1$.

（以上）