２００７年度数理科学 II（理 I 向け）演習　　　　'07/7/4（水）２限

問１． 微分方程式 $y' = -2xy^2$, $y(0) = 1$ の解を g とし, これを逐次近似法で求めてみる[1].

1) $f(x,y) = -2xy^2$ として, $y_0(x) = 1$, $y_n(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))dt$ とするとき, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ を具体的に求めよ.
2) 解 g を求めよ.
3) y_n は任意の閉区間 $[0,c]$ 上で g に一様収束することを示せ.
4) g の 0 におけるテーラー展開を求め, $x > 1$ の時剰余項は 0 に収束しないことを示せ. また, g の 0 におけるテーラー級数の収束半径を求めよ.

※ 本当は 2) と 3) は逆で, y_n がどんな函数に収束するか考察して（当たりをつけて）それに本当に収束していることを示すのが本筋である.

問２． 以下のベクトル場 X の積分曲線を求めよ.

1) $X(x,y) = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$.
2) $X(x,y) = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$.
3) $X(x,y) = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$.

問３． ２つの C^∞ 級の曲線 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ が $t = t_0$ で交わるとする. つまり $\varphi(t_0) = \psi(t_0) \in \mathbb{R}^2$ とする. この点を p とする. φ, ψ が交点 p でなす角を, p における φ, ψ の接線のなす角と定める.

1) $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}$, $\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$ と座標を用いて表す. $\varphi(t)$, $\psi(t)$ が $t = t_0$ で直交するための条件を式で表せ.
2) ２つのベクトル場 $X(x,y) = a_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + a_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$, $Y(x,y) = b_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + b_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ が条件 $a_1(x,y)b_1(x,y) + a_2(x,y)b_2(x,y) = 0$ を充たすとする. このとき, X, Y の積分曲線は交わるのであれば直交することを示せ. ただし, X, Y はいずれも零ベクトル $\left(= 0\dfrac{\partial}{\partial x} + 0\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ にはならないとする.

問４．

1) $a = a(x)$ を $x \in \mathbb{R}$ の連続函数とし, y に対する微分方程式 $y' = ay$ を考える. f を一つの解とする. ある $T > 0$ が存在して a が $a(x+T) = a(x)$ を充たすならば, $g(x) = f(x+T)$ で定まる函数 g も解であることを示せ.

[1] 解の存在を示したときの方法を実際に適用してみる

2) 解の一意性を用いて $g(x) = cf(x)$ を充たす実数 c が唯一つ存在することを示せ.
3) $c < 0$ ($c > 0$) であれば $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ($\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$) であることを示せ.
4) $c = 1$ であれば $|f(x)|$ は $x \to +\infty$ の時有界であることを示せ．すなわち, ある実数 M, x_0 が存在し, $x > x_0$ のとき $|f(x)| \leq M$ であることを示せ．また, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在しないような例を挙げよ.

問 5． 条件

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists M > 0,\ x > M \Rightarrow |\Psi(x, y)| < \epsilon$$

をみたす $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の C^1-級の函数 Ψ で, 常微分方程式 $y' = \Psi(x, y)$ の $(0, \infty)$ 上で定義された解 f で $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ なるものが存在するような例を挙げよ.

（以上）