２００７年度数理科学 II（理 I 向け）演習 '07/6/6（水）２限

問１． (1) 微分方程式

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

の $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を充たす解をそれぞれ求めよ.

ヒント：まず y_2 について微分方程式を解いてみよ.

(2) (1) で得た解をそれぞれ Y_1, Y_2 として，行列値函数 Λ を $\Lambda(x) = (Y_1(x)\ Y_2(x))$ として定める（Λ は定義により基本解行列である）．$\Lambda(x)$ は任意の x について正則であることを確かめよ。

(3) (2) で作った基本解行列 Λ を用いて微分方程式

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xe^{\frac{1}{2}x^2} \\ e^{\frac{1}{2}x^2} \end{pmatrix}$$

の一般解を求めよ。

問２． 以下の $y = y(x)$ に関する高階常微分方程式の一般解を求めよ。

1) $y'' + 3y' + 2y = 0$
2) $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0$
3) $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = 0$
4) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

問３． x の函数 y に関する常微分方程式 $y'' + Py' + Qy = 0$, P, Q は x の連続函数, を考える．便宜上この方程式を $(*)$ と呼ぶ．以下では（連続な係数を持つ）線形常微分方程式に関する解の存在と一意性を用いてよい.

1) $(*)$ の解 y が $y(0) = y'(0) = 0$ を充たすならば y は恒等的に 0 であることを示せ.
2) y を $(*)$ の解であって，恒等的には 0 ではないものとする．$x_0 \in \mathbb{R}$ について $y(x_0) = 0$ であるとする（x_0 は y の零点であるなどという）．このときある $\epsilon > 0$ が存在し，$(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ における y の零点は x_0 のみであることを示せ．すなわち，$x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, $x \neq x_0$ であれば $y(x) \neq 0$ であるような $\epsilon > 0$ が存在することを示せ.
3) $(*)$ の一組の基本解を y_1, y_2 とする．a, b を y_1 の零点であって, 区間 (a, b) には y_1 は零点を持たないとする．このとき，y_2 は (a, b) に零点を唯一つ持つことを示せ.
4) y を $(*)$ の恒等的には 0 ではない解とし，$J = [a, b]$ を（有限な）閉区間とすると，y の J における零点は有限個であることを示せ.
   ヒント：任意の $x \in J$ について x を含む開区間であって，そこにおける y の零点は高々1 個であるようなものがとれることが示せたとする．J はコンパクトなのでハイネ・ボレルの定理（任意の開被覆が有限部分被覆を持つ）を利用できる.

（以上）