２００７年度数理科学 II（理 I 向け）演習　　　　　'07/5/2（水）２限

**問１**[1]**．** 行列 $X$ が以下に等しい場合に，指数行列 $\exp X$ と $\exp(tX)$ をそれぞれ求めよ.[2] 指数函数や三角函数がテーラー展開可能であること，またその展開は既知としてよい.
ヒント：Jordan 標準形に持ち込むのは常に得策というわけではない.

1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　　2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　　3) $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ここで $s$ は実定数.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$　　5) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**問２．** 以下の常微分方程式を解け.

1) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 - 2y_3 \\ y_2' = -3y_1 + 13y_2 - 7y_3 \\ y_3' = -5y_1 + 19y_2 - 10y_3 \end{cases}$

2) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

**問３．** $f$ を $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}$ 値函数とする. このとき微分方程式

$$\frac{df}{dx}(x) = 3f(x) + xe^{3x}, \quad f(0) = 0$$

を以下の手順に従って解け.

1) まず，$\dfrac{df}{dx}(x) = 3f(x)$ を解く.（解は $f(x) = Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$）

2) $f$ が $\dfrac{df}{dx}(x) = 3f(x) + xe^{3x}$ の解であったとして，$g(x) = f(x)e^{-3x}$ とおき，$g$ の充たすべき微分方程式を求める.

3) 上で求めた微分方程式を解き，初期条件 $(f(0) = 0)$ を充たす解を選ぶ.

**問４．** $\mathbb{R}^n$ 値函数 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$y' = Ay + b$, $A$ は $n$ 次正方行列（定数），$b$ は $\mathbb{R}^n$ に値をとる $\mathbb{R}$ 上の連続函数,

の解き方を問３をふまえて考えてみよ.
注意：種々の不定積分が現実的な意味で実行できるかどうかは気にしなくてよい.

（以上）

[1] ５月７日改題, ７月４日訂正
[2] 4), 5), 6) は線型代数演習 齋藤正彦著 東京大学出版会より改題