２００７年度数理科学 II（理 I 向け）演習　　　　　　　　　　'07/4/25（水）２限

問１． dx や dy を形式的に記号として考えることとして，$f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$ の形の「方程式」を考えることがある．このような方程式を全微分方程式と呼ぶ．この問では，函数や変数による割り算などはおおらかに考えてよいことにする．

1) f が x と y の C^∞ 級函数[1] であるとき，$df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$ と定める．右辺は係数に表れる函数が 0 なら 0 とみなす．つまり，$0dx+0dy$ を 0 と表す．さて，$y=h(x)$ が $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ の解であったとする．また，$\varphi=\varphi(x,y)$ が $d\varphi=fdx+gdy$ を充たすとする．このとき，$\psi(x)=\varphi(x,h(x))$ と定めると $\dfrac{d\psi}{dx}=0$ であることを示せ．
※ 逆に言えば，方程式 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f}{g}$ を解くのに，形式的にこれを $fdx+gdy=0$ と書き換えてから，（'$=0$' のところはあまり気にせず,）$d\varphi=fdx+gdy$ を充たすような $\varphi(x,y)$ を見つけることができたとする．このとき，$\varphi(x,y)=c$（定数）を y について解けば元の方程式の解が得られたことになる．$f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$ というのは本当は $(f(x,y)dx+g(x,y)dy)(X)=0$ なるベクトル X を考える，という意味があるのだが，これはベクトル場を扱うときに改めて取り上げる．
2) $d\varphi=fdx+gdy$ なる φ が存在したとすると，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$ であることを示せ．この事実はしばしば $d(fdx+gdy)=0$ と表される．

問２． $\mathbb{R}^2$ の直線族（直線のあつまり）$\{y=e^cx+e^c(1-c)\}$, $c\in\mathbb{R}$ が充たす Clairaut の方程式をひとつ挙げよ．また，逆にその方程式を解いて，特異解がこれらの直線の包絡線になっていることを確かめよ．

問３． $y(x)$ に関する次の微分方程式を解け．
ヒント：解のあたりをつける際には思い切っておおらかに積分などを計算してしまうのがよい．

1) $y'=y^2$　　2) $xy'=y$　　3) $y'=\dfrac{2y+x}{x}$
4) $y'+y\cos x=\sin x\cos x$　　5) $y'+2xy=x$　　6) $y'+\dfrac{y}{x}=x$
7) $(5x+4y+1)dx+(4x+2y+3)dy=0$
8) $\sin y\,dx+(1+x\cos y)dy=0$
9) $y=xy'+{y'}^2$　　10) $y=xy'-e^{y'}$

（以上）

[1]実際には C^1 級で十分である