２００７年度数学 II 演習（理 I）No. 13 　　　　　　　　　　’08/1/7（月）４限

問１． 1) $\mathbb{R}^3$ に標準内積を入れる． $v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ とすると, v_3 と v_1, v_3 と v_2 はそれぞれ直交していることを示せ.

2) 1) において $\det(v_1\ v_2\ v_3)$ を求めよ.

3) 1) において v_1, v_2 は一次独立であるとする．このとき, v_1, v_2 で生成される部分線型空間の直交補空間を求めよ.

4) $\mathbb{R}^n$ に標準内積を入れる．$i = 1, \ldots, n-1$ に対して $v_i \in \mathbb{R}^n$ を $v_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$, $i = 1, \ldots, n-1$ として定める．$v_1, \cdots, v_{n-1}$ が一次独立であるとき, $v_n \in \mathbb{R}^n$ であって, $v_i \perp v_n$, $i = 1, \cdots, n-1$, かつ $\det(v_1\ \cdots\ v_n) = \|v_n\|^2$ なるものが唯一存在することを示し, v_n の成分を求めよ.

5) $V = \{x$ に関する高々3 次の実多項式$\}$ とし, $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ とする. $x^2 + x,\ x^3 - x + 1$ で生成される部分線型空間の直交補空間を求めよ.

問２． $\mathbb{R}^4$ に標準内積を入れ, W を $\begin{pmatrix} \frac{8\sqrt{2}-4}{3} \\ 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ で生成される部分線型空間とする.

1) W の直交補空間を求めよ。

2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の W への直交射影（$\mathbb{R}^4$ から W への直交射影による像）を求めよ.

3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の W に関する鏡映（W に関する鏡映による像）を求めよ．ただし, $p\colon \mathbb{R}^4 \to W$ を直交射影とするとき, 鏡映 $r\colon \mathbb{R}^4 \to W$ を $r = 2p - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$ で定める.

定義３． V を K-線型空間とし, $V_1, \cdots, V_r$ を V の K-線型部分空間とする．和空間 $V_1 + \cdots + V_r$ が直和であるとは, $v_1 + \cdots + v_r = 0$, $v_i \in V_i$, のとき $v_i = 0$ がすべての i について成り立つことをいう．このとき, 和空間 $V_1 + \cdots + V_r$ を $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ と表す.

問４． V を K-線型空間とし, $V_1, \cdots, V_r, U_1, \cdots, U_r$ を V の K-線型部分空間とする. $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ かつ $\forall i\ U_i \subset V_i$ であれば $\forall i\ U_i = V_i$ であることを示せ.

問5． 1) $v_1, \cdots, v_r \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}$ 上一次独立であることと, $v_1, \cdots, v_r$ を $\mathbb{C}^n$ の元とみなしたとき, これらが $\mathbb{C}$ 上一次独立であることは同値であることを示せ.

2) $v_1, \cdots, v_r \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}$ 上生成する $\mathbb{R}^n$ の部分空間が $\mathbb{R}$ 上 k 次元であることと, $v_1, \cdots, v_r$ を $\mathbb{C}^n$ の元とみなしたとき, これらが $\mathbb{C}$ 上生成する $\mathbb{C}^n$ の部分空間が $\mathbb{C}$ 上 k 次元であることは同値であることを示せ.

3) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．ある実数 α と $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ について $Av = \alpha v$ が成り立てば, ある $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$ について $Au = \alpha u$ が成り立つことを示せ.

4) ある $A \in M_n(\mathbb{R})$ とある $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ について $Av = 0$ が成り立てば, ある $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$ について $Au = 0$ が成り立つことを示せ.

5) 3) は 4) から従うことを示せ.

問6． $\mathbb{C}^n$ を標準的なエルミート計量により複素計量線型空間とみなす．計量を $\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle$ で表す．$\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の正規直交基底とすると $A \in M_n(\mathbb{C})$ について $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} \langle Av_i, v_i \rangle$ が成り立つことを示せ.

問7． 1) 以下に挙げる行列（A と呼ぶ）が対角化可能であれば対角化し, 対角化不可能であればそのことを示せ．対角化の際には, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P も明示すること．また, 固有値が全て実数であるような実行列は実行列で対角化すること.

2) $A^m, m \in \mathbb{Z}$ を求めよ．ただし, A が n 次であれば $A^0 = E_n$ とし, また, $A^m, m < 0$ は A が正則なときのみ $A^m = (A^{-1})^{-m}$ として定める.

注意：A^m を求めるのに対角化は必ずしも必要ではないし, 対角化を用いるよりも易しい計算法が存在することもある.

1) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 10 \\ -10 & -2 & -14 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

問8． 1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は $\mathbb{C}$ 上対角化可能であるが, $\mathbb{R}$ 上対角化不可能であることを示せ.

2) $A \in M_2(\mathbb{R})$ の固有値の一つ α が実数であるとする．α に属する A の固有空間を V_α とすると V_α は A-不変であることを示せ．すなわち, $v \in V_\alpha$ であれば $Av \in V_\alpha$ であることを示せ.

3) 2) を踏まえて 1) の結果を説明せよ．（ヒント：実数の範囲では固有空間が存在しない.）

4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{C}$ 上対角化不可能であることを示せ.（したがって $\mathbb{R}$ 上でも対角化不可能である.）

5) 2) を踏まえて 4) の結果を説明せよ.（ヒント：1 次元の固有空間が存在するが, そのほかには固有空間が存在しない. なお, 実数の範囲で考えても複素数の範囲で考えても同じことである.）

問 9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ とする.

1) A の固有多項式を求めよ.
2) A の固有値と, 各固有値の重複度を求めよ.
3) A の固有ベクトルからなる $\mathbb{C}^2$ の基底を求めよ.
4) A は対角化可能である. そこで A を対角化せよ.
5) A^n を求めよ.
6) $v \in \mathbb{C}^2$, $\|v\| = 1$ とする. ただし, $\|\cdot\|$ は標準エルミート計量に関するノルム（長さ）である. A の固有ベクトルで, 長さが 1 であるものを v_1, v_2 とすると

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|A^n v\|} A^n v$$

は αv_1, ただし $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ あるいは βv_2, ただし $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$ のいずれかのベクトルに収束することを示せ. また, $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ とあらわしたとき, α あるいは β を λ_1, λ_2 を用いて表せ.

射影は実は計量がなくともある程度考えることができる.（特に第 8 節を参照のこと.）

定義 10. V を n 次元 K-線型空間とする.

1) $p\colon V \to V$ が条件

$$\text{任意の } v \in V \text{ について } p(p(v)) = p(v)$$

をみたす時, p を射影（あるいは射影子）と呼ぶ.

2) W, U を V の部分線型空間とし, $V = W \oplus U$ が成り立っているとする（直和分解と呼ぶ）. このとき, W への射影 p を次のように定める： $v \in V$ を $v = w + u$, $w \in W$, $u \in U$ と表し, $p(v) = w$ とおく.

注意：$v \in V$ を上のように $v = w + u$ と表す方法は一意的である（命題 8.8）.

これから調べるように, これらの定義は本質的には一致する.

問 11． V を n 次元 K-線型空間, W, U を V の部分線型空間であって $V = W \oplus U$ が成り立っているとする．このとき, W への定義 10．2) の意味での射影は定義 10．1) の意味での射影であることを示せ.
ヒント：$v \in V$ とし, $v = w+u$ とすると定義から $p(v) = w$ であるので $p(p(v)) = p(w)$ である．一方 $w = w + 0$ であることを用いて w と $p(w)$ を比較してみよ.

定理 12． V を n 次元 K-線型空間とする．$p\colon V \to V$ を射影とする．$v \in V$ について $q(v) = v - p(v)$ とおくと次が成り立つ.

1) 任意の $v \in V$ について $q(q(v)) = q(v)$．つまり, q も射影である.
2) 任意の $v \in V$ について $p(q(v)) = q(p(v)) = 0$.
3) $W = \operatorname{Im} p$ とすると, $W = \{v \in V \mid v = p(v)\} = \operatorname{Ker} q$ が成り立つ.
4) $U = \operatorname{Im} q$ とすると, $U = \{v \in V \mid v = q(v)\} = \operatorname{Ker} p$ が成り立つ.
5) $V = W \oplus U$ である.

したがって, $W = \operatorname{Im} p$, $U = \operatorname{Ker} p$ とすれば p は定義９．2) の意味での射影である.

証明. $v \in V$ とすると $q(p(v)) = p(v) - p(p(v)) = p(v) - p(v) = 0$, $p(q(v)) = p(v - p(v)) = p(v) - p(p(v)) = 0$ がそれぞれ成り立つ．また, $q(q(v)) = q(v - p(v)) = q(v) - q(p(v)) = q(v)$ も成り立つ．したがって 1), 2) が示された．ここで $W = \operatorname{Im} p$, $W' = \{v \in V \mid v = p(v)\}$ と置く．$w \in W'$ とすると, $w = p(w)$ が成り立つので, 像の定義から $w \in W(= \operatorname{Im} p)$ である．したがって $W' \subset W$ である．一方, $w \in W$ とすると, $w = p(v)$ があるる $v \in V$ について成り立つ．すると, $p(w) = p(p(v)) = p(v) = w$ が成り立つので, $w \in W'$ であるから $W \subset W'$ である．よって $W = W'$ が成り立つ．ところで, $v = p(v)$ は $v - p(v) = 0$ と同値であるが, この式の左辺は $q(v)$ なので $W' = \operatorname{Ker} q$ である．よって 3) が示された．また, $U = \operatorname{Im} q$ とおくと, U についての主張も同様に成り立つので 4) も成り立つ（問４を参照）．最後に, 任意の $v \in V$ について, p, q の定め方から $v = p(v) + q(v)$ なので $V = W + U$ が成り立つ．ここで $v \in W \cap U$ とすると, $v \in W$ だから 3) より $v = p(v)$ が成り立つ．一方, 再び 3) より $v = q(v)$ であるので, $v = p(v) = p(q(v)) = 0$ が成り立つ．したがって, $W \cap U = \{0\}$ が成り立つ．これで 5) も示された． □

問 13． 必要に応じて W の場合を真似して U に関する主張 4) を示せ.

定理 12 は, 直和分解と２つの射影で, 和が恒等写像になっているものの組が一対一に対応していることを示している．特に, 射影は定理でいう処の空間 W のみを指定しているのではなく, $V = W \oplus U$ という直和分解まで指定している.

注 14． 一般に r 個の部分線型空間への直和分解 $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ と, r 個の射影で, 和が恒等写像になっているものの組が対応する.

定義 15． 射影 p が与えられた時, v に対して $2p(v)-v$ を与える写像を $\mathrm{Im}\, p$ に関する鏡映という.

問 16． p を射影とし, r を鏡映とする. $r = 2p - \mathrm{id}_V$ である. このとき, $\frac{v+r(v)}{2} \in \mathrm{Im}\, p$, $r(v)-v \in \mathrm{Ker}\, p$ が成り立つことを示せ.
ヒント：地道に計算すればよい.

問 17． V を計量線型空間とし, W を V の部分線型空間とする. $p\colon V \to W$ を直交射影とする.

1) p は定義 10. 1) の意味での射影であることを示せ.
2) 定理 12 によれば, $U = \mathrm{Ker}\, p$ とすれば $V = W \oplus U$ である. $U = W^{\perp}$ であることを示せ.

（以上）